Tempo a disposizione: 75 minuti

ESERCIZI

1. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y-3 \leq x \leq \sqrt{9-y^2}\,; 0 \leq y \leq 3\}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\quad f(x,y) = 2x + y$. Detti $M = \max_T f$ e $m = \min_T f$ si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = -5$ e $M = 3$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 0$ e $M = 3$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 6$ e $M = 3\sqrt{5}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = -6$ e $M = 3\sqrt{5}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -3$ e $M = 0$ $\boxed{\text{F}}$: $m = 3$ e $M = 3\sqrt{5}$

   Punti: 7

2. L'integrale
$$\iiint_T [3xy + 2xz + y^2 z]\, dxdydz$$
   dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z, \ 0 \leq z \leq 6\}$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3^2\pi$ $\boxed{\text{B}}$: $3^4\pi$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $-3^4\pi$ $\boxed{\text{E}}$: 6π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}$

   Punti: 7

3. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.

   (a) La serie ha raggio di convergenza 2 per ogni $\alpha > 0$ (b) l'insieme di convergenza puntuale è $I = [-2, 2]$ per ogni $\alpha > 0$ (c) l'insieme di convergenza puntuale è $I = [-2, 2]$ per ogni $\alpha > 1$ (d) la serie converge totalmente in $[-r, r]$ con $0 < r < 2$ per ogni $\alpha > 0$ (e) la serie converge uniformemente in $[-2, 0]$ per ogni $\alpha > 0$.

   Punti: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Scrivere la definizione di convergenza uniforme per successioni di funzioni e scrivere un esempio di successione convergente uniformemente.

Punti: 4

Domanda 2. Enunciare un teorema di esistenza globale della soluzione del problema di Cauchy. Dare un esempio di problema di Cauchy per il quale vale il teorema enunciato e un esempio per il quale il teorema non vale.

Punti: 5