Lezione 1

parte b

$$|x+1| - x^2 + 3 = 0$$

Algebrica

1° parte

- $x+1 \geq 0$ $\boxed{x \geq -1}$ condizione sul modulo Arg ≥ 0 *

$$x+1 - x^2 + 3 = 0$$

$$-x^2 + x + 4 = 0$$

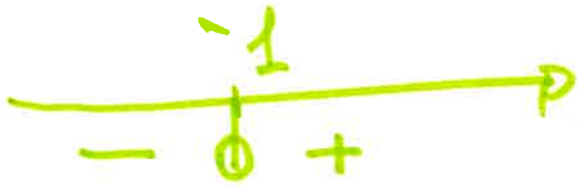
$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \sim 2{,}6 \quad \text{acc.} \ *$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \sim -1{,}6 \quad \text{NO. Acc} \ *$$

2' parte



Arg. neg $\boxed{x+1<0}$ $x<-1$

$-(x+1)-x^2+3=0$

$-x-1-x^2+3=0$

$-x^2-x+2=0$

$x^2+x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$x_1=1$ non ac.

$x_2=-2$ acc.

Soluzioni sono $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $x=-2$

Risoluzione grafica

isolo | |

$$|x+1| = x^2 - 3 \iff \begin{cases} y = |x+1| \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$$

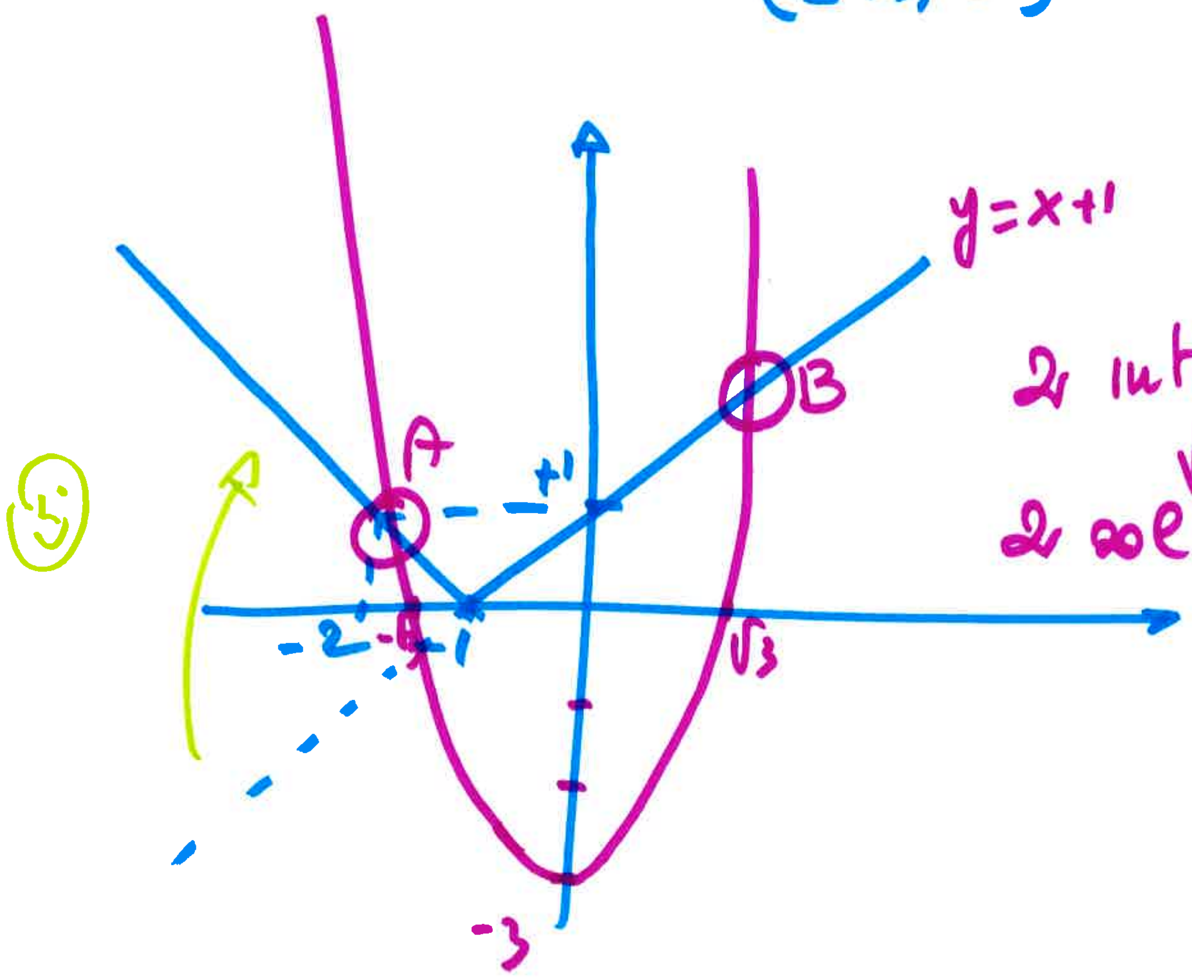
2 funzioni

$y = |x+1|$ 2 porzioni di retta $y = x+1$

$y = x^2 - 3$ parabola

$V(0, -3)$ $\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right]$

$(\pm\sqrt{3}, 0)$

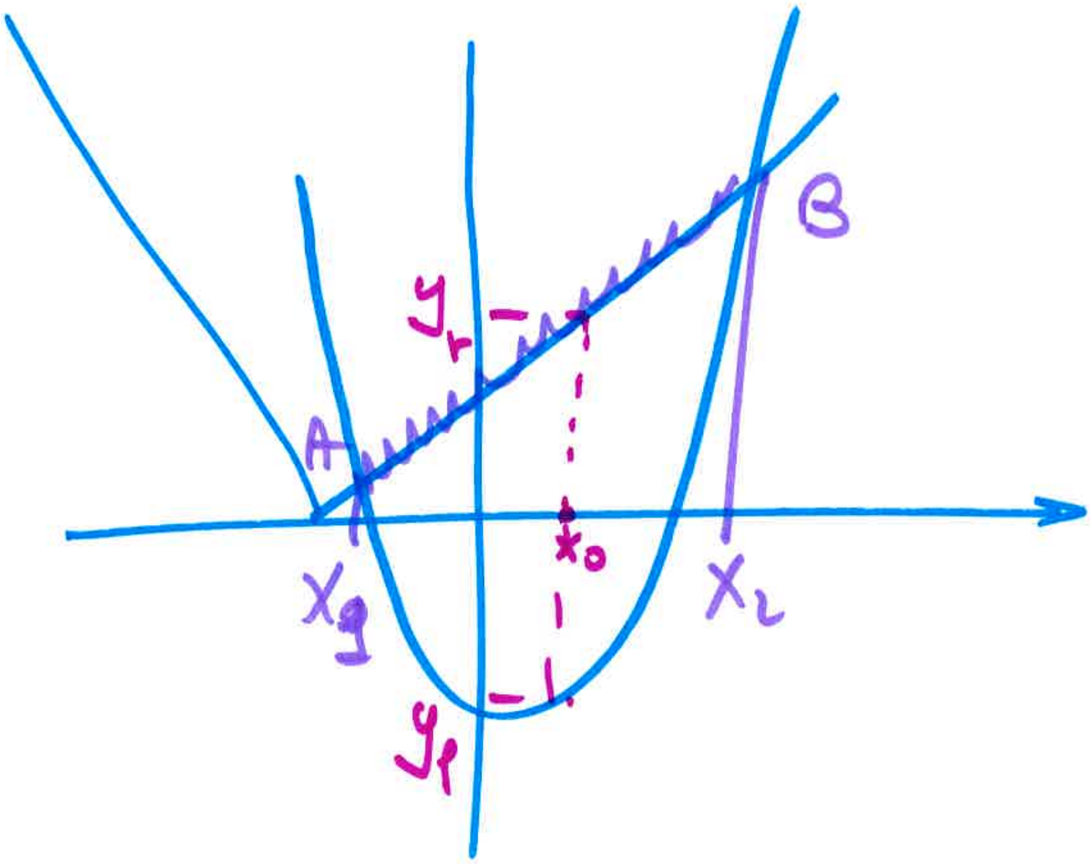


2 intersezioni

↓

2 sol.

$|x+1| - x^2 + 3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$



retta > parabola ; sta al di sopra

$|x+1| \geq x^2 - 3$

Retta $\geq$ parabola

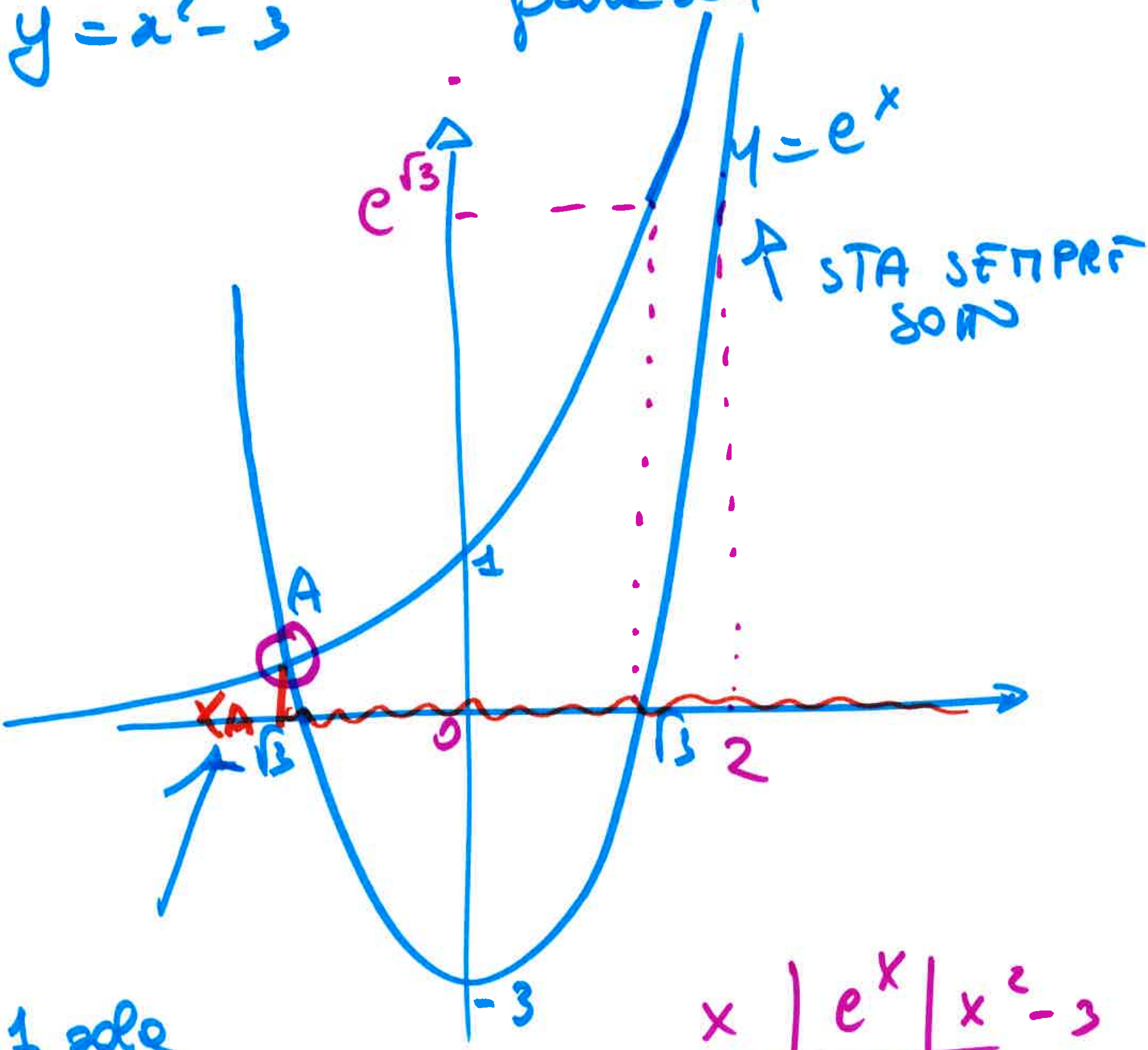
Per quali valori di x la "retta" è al di sopra della parabola

$$e^x - x^2 + 3 \geq 0$$

$$e^x \geq x^2 - 3$$

$y = e^x$ esponenziale

$y = x^2 - 3$ parabola



$\exists$ 1 sola intersezione

x	e^x	$x^2 - 3$
$\sqrt{3}$	$e^{\sqrt{3}}$	0
2	e^2	1

x	e^x	x^2-3
$\sqrt{3}$	$e^{\sqrt{3}}$	0
2	e^2	1

$e^{\sqrt{3}} > 0$

$e^2 > 1$

1) sono funzioni monotone crescenti

2) l'esponenziale cresce "più velocemente" di un polinomio ("parabole"

$e^x = x^2 - 3$

$\exists$ 1 sola sol. (A)

$x_A < -\sqrt{3}$

$e^x \geq x^2 - 3$

quando l' esponenziale

"sta sopra" alla parabola?

$x \geq \cancel{\sqrt{3}}\,x_A$

$$e^x \geq x^2 - 3$$

base > 1 mantengo il verso

$$\ln e^x \geq \ln(x^2 - 3)$$

$$x \underbrace{\cancel{\ln e}}_{1} \geq \ln(x^2 - 3)$$

$$x \geq \ln(x^2 - 3)$$

Trascendente

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$y = \cosh x = ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

coseno iperbolico di x

semisomma degli esponenziali simmetrici e^x e e^{-x}

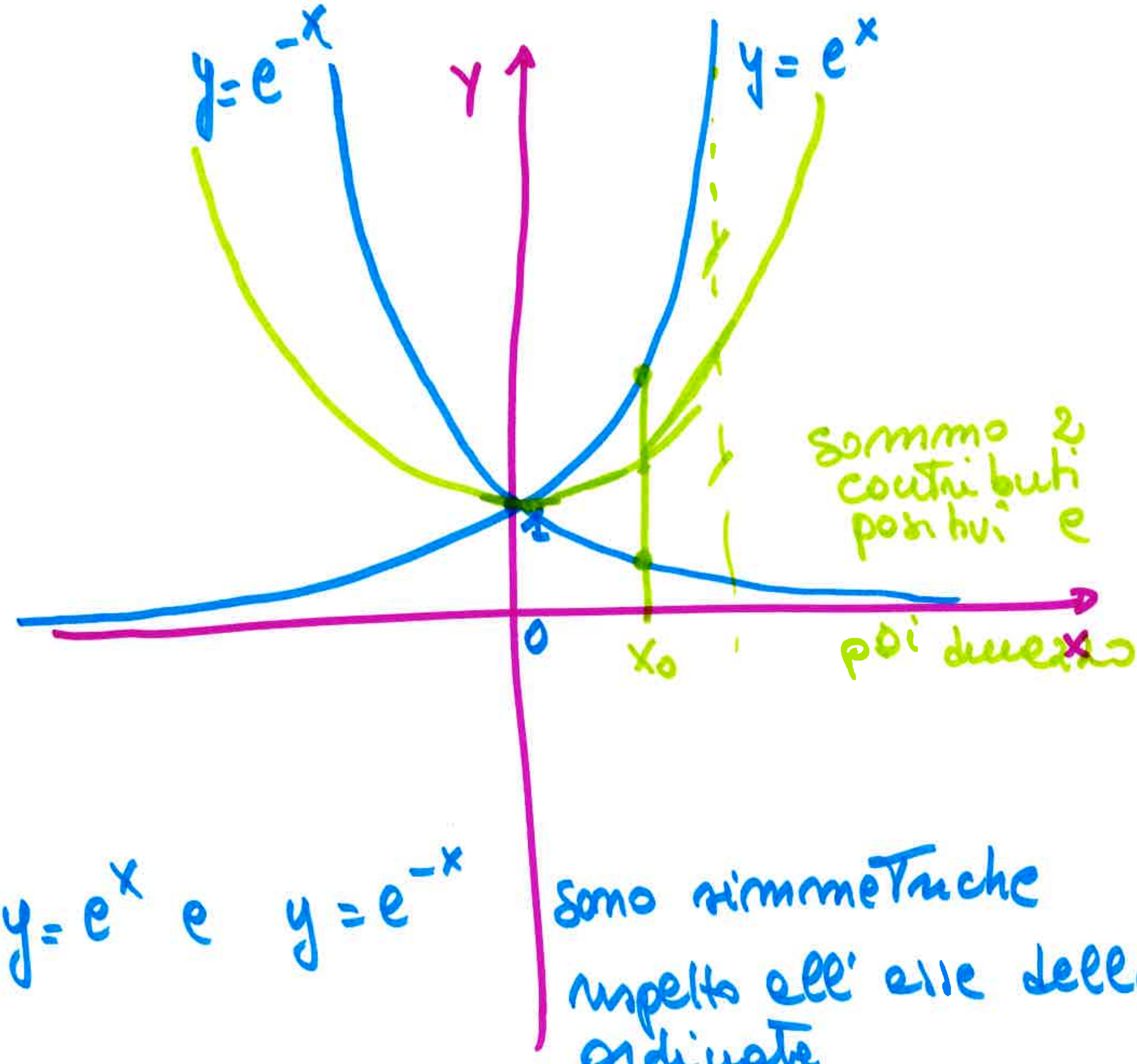
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{2e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dominio di $y = \cosh x$: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$y = e^x$
$y = e^{-x}$ $\rightarrow e^x + e^{-x} \rightarrow (e^x + e^{-x})\frac{1}{2}$



$y = e^x$ e $y = e^{-x}$ sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate

x	e^x	e^{-x}	$e^x + e^{-x}$	$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
0	1	1	2	1

$y = \cosh x$

- esiste $\forall x \in \mathbb{R}$
- sempre positiva
- $(0, 1)$
- simmetrica rispetto all' asse delle ordinate

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in dom$$

pari

- $\nearrow \quad x \geq 0$

$\searrow \quad x < 0$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = f(x)$$

$x \to (-x)$

$$y = \operatorname{senh} x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(semidifferenza)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \geq 0 \Rightarrow e^{2x} - 1 \geq 0$$

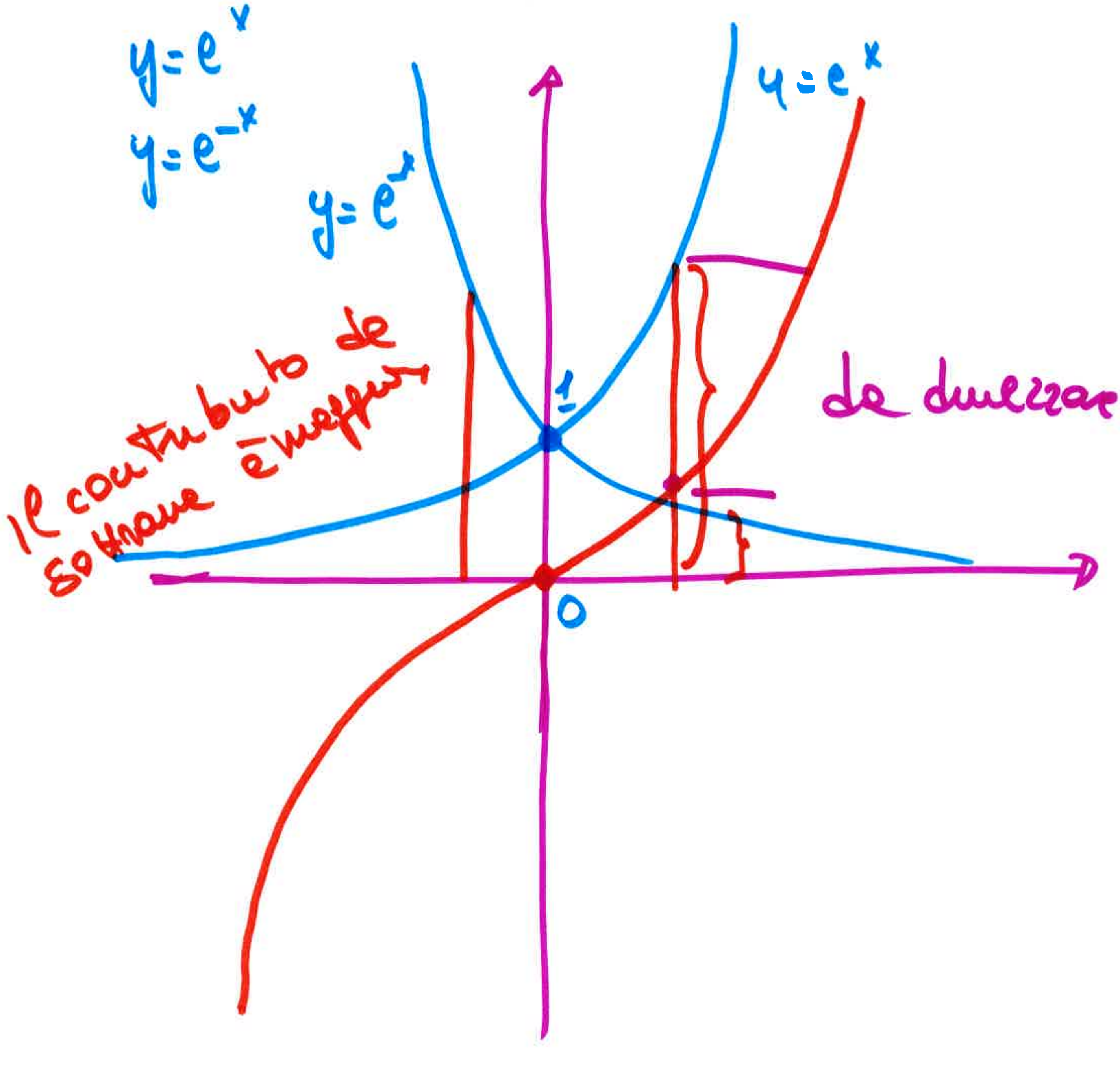
den $> 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{2x} \geq 1 = e^0$$

$$2x \geq 0$$

$$x \geq 0$$

		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{e^0 - e^0}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f(x)$$

raccolto (-)

- dominio $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$
- – simmetrica rispetto all'origine
  - dispari
  - $f(-x) = -f(x)$
- $\nearrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Algebra delle funzioni iperboliche

Relazione fondamentale

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

si definiscono

$$y = Tgh\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x} =$$

$$= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{\cancel{2}}}{\frac{e^x + e^{-x}}{\cancel{2}}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = \mathrm{ctgh}\, x = \mathrm{tgh}^{-1} x =$$

$$= \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$y = \mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

PROPRIETA'

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

- $\cosh(2x) = \begin{cases} \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ 1 + 2\sinh^2 x \\ 2\cosh^2 x - 1 \end{cases}$

- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$

Si calcolano anche le funzioni inverse (espressioni logaritmiche)

1. si esplicita la x rispetto la y

2. si applica la trasformata

$y = x$

3. il grafico è simmetrico rispetto la bisettrice I/III quadrante

$y = x$

4. l'inversa si calcola nei tratti ove la $y = f(x)$ è monotona ($\nearrow$ o $\searrow$)

calcolo dell'inverso

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$$

$e^x \neq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$2e^x y = e^{2x} + 1$$

$$e^{2x} - 2y\,e^x + 1 = 0$$

eq. esponenziale
2° grado

$$e^x_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

C.E $y^2 - 1 \geq 0$
$y \leq -1 \cup y \geq 1$

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}$$

$$e^x = y - \sqrt{y^2-1}$$

$\rightarrow x = \log_e \left[y + \sqrt{y^2 - 1} \right]$

TRASFORMATA $y = x$

$$y = \log_e \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

con $x^2 - 1 \geq 0$

$x \leq -1 \quad x \geq 1$

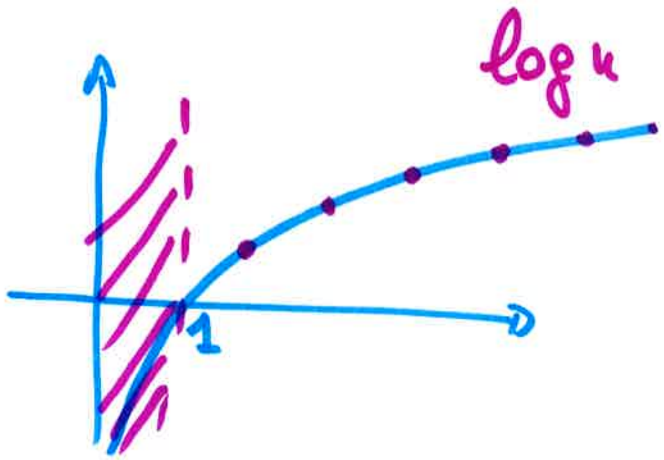
Tratto crescente $\Rightarrow$ invertibile

- $A_n = \{ x_n = (-1)^n + \log n \; , \; n \in \mathbb{N} \}$

$[\, n > 0 \,]$

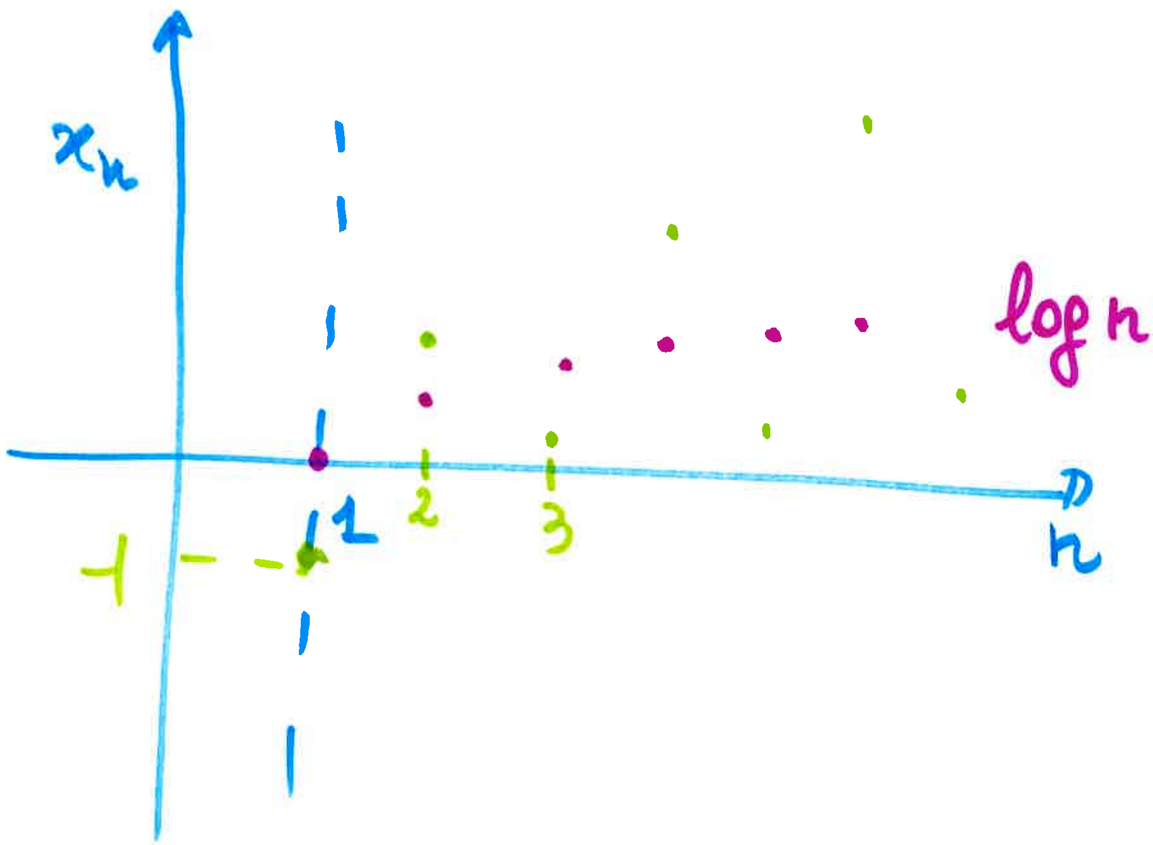
$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & n = 2m \quad \text{pari} \\ -1 & n = 2m+1 \quad \text{dispari} \end{cases}$$

$y = \log x$



succesione di punti crescente

$$x_n = \begin{cases} 1 + \log n & n \text{ pari} \\ -1 + \log n & n \text{ dispari} \end{cases}$$



$n=1 \qquad x_1 = (-1)^1 + \log 1 = -1 + 0 = -1$

$n=2 \qquad x_2 = (-1)^2 + \log 2 = 1 + \underbrace{\log 2}_{0 < \log 2 < 1}$

$$\log e = 1$$

$n=3 \qquad x_3 = (-1)^3 + \log 3 = -1 + \underbrace{\log 3}_{\log 3 > 1} > 0$

insieme con

- 1 Termine repetuo x_1
- Termini positivi $x_n \geq x_2$
- andamento altalenante, ma crescente
- superiormente illimitato
- minimo $= x_1$