Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \leq y \leq 2 - |x|\}$ e sia $f(x, y) = y + x + \frac{1}{4}$. Detti m e M il minimo e il massimo di f su T, si ha

   $\boxed{\text{A}}$: $m = -4$, $M = \frac{9}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = -4$, $M = 2$ $\boxed{\text{C}}$: $m = -1$, $M = \frac{9}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = -2$, $M = 0$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -2$, $M = 2$

2. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

   $$\vec{F}(x, y) = (e^x(2 \sin x + \cos y) + 2e^x \cos x + \sin y)\,\vec{i} + (1 + x \cos y - e^x \sin y)\,\vec{j}.$$

   Sia Γ la semicirconferenza di centro $(0, \pi/2)$, raggio $\pi/2$ e ascisse positive percorsa in senso antiorario. Allora l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2 - \pi$ $\boxed{\text{B}}$: $\pi - 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\pi - 2$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: $1 - \pi$

3. Sia S la superficie data da

   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad z \leq 7\}\,.$$

   Allora $\displaystyle\iint_s \frac{3}{2} z dS$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(7)^3\sqrt{2}\,\pi$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $(7)^3\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $(7)^3\sqrt{3}\,\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $-(7)^3\sqrt{3}\,\pi$

4. Sia data la successione di funzioni $\quad f_n(x) = \exp\left(\left(\frac{x}{7}\right)^{2n}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) f_n converge puntualmente a $f(x) = 1$ in $]-\infty, 7[$ (b) f_n converge puntualmente in $[-7, 7]$ (c) f_n converge uniformemente in $]-7, 7[$ (d) f_n converge uniformemente sugli intervalli del tipo $[-a, a]$ per qualsiasi $0 < a < 7$ (e) in qualunque sottointervallo di $\mathbb{R}$ f_n non converge uniformemente

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e)

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^{7\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente in $]-1, 1[$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $]-\infty, 0[$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) la serie converge uniformemente in $]-\infty, 0]$ per ogni $\alpha \geq \frac{1}{7}$ (d) la serie converge totalmente in $]-\infty, 0]$ per ogni $\alpha > \frac{1}{7}$ (e) la serie converge uniformemente in $]-1, 1[$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e) $\boxed{\text{C}}$: (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d)

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\arctan x^3}{(x^2+y^2)^{\alpha-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f è continua in $(0,0)$?
   (b) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f ammette le derivate parziali in $(0,0)$?
   (c) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f è differenziabile in $(0,0)$?

   [**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2)\arctan^2(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

   Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

   (a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;
   (b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;
   (c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;
   (d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

   [**Punteggio: 5 punti**]
