Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$. Sia $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da $g(x,y)=e^{x^2-y^2+2xy}$. Detti $M=\max_T g$ e $m=\min_T g$ si ha

   $\boxed{A}$: $m=0$ e $M=e^2$ $\boxed{B}$: $m=0$ e $M=e$ $\boxed{C}$: $m=1$ e $M=e$ $\boxed{D}$: $m=1$ e $M=e^3$ $\boxed{E}$: $m=1$ e $M=e^2$

2. Sia dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y)=\left(\frac{2x+7y}{x^2+y^2+7xy+1}+e^y+ye^x\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{7x+2y}{x^2+y^2+7xy+1}+xe^y+e^x\right)\overrightarrow{j}\,.$$

   Sia Γ l'arco di parabola $y=x^2$ con $0\le x\le 1$. Allora l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma$ vale

   $\boxed{A}$: $\log 10$ $\boxed{B}$: $2e+\log 10$ $\boxed{C}$: $2+\log 9$ $\boxed{D}$: $2e+\log 9$ $\boxed{E}$: $\log 9$

3. L'integrale doppio

$$\iint_T \left[2x^3+\frac{3}{2}\right]\,dxdy$$

   dove $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -2+|x|\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$, vale

   $\boxed{A}$: $2(\pi+2)$ $\boxed{B}$: $3(\pi+2)$ $\boxed{C}$: $3(\pi+1)$ $\boxed{D}$: $\frac{3}{2}(\pi+2)$ $\boxed{E}$: 3π

4. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left((x-7)^n + \frac{n+2}{n+1}\right), \quad x \in [7,+\infty[.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $[7,8]$ (b) f_n converge uniformemente in $]7,8]$ (c) f_n converge uniformemente in $[7,8[$ (d) f_n converge uniformemente in $[7,a]$ per ogni $7 < a < 8$

le uniche corrette sono

$\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b)

---

5. Sia $\alpha \geq 7$ e sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n+1)^{\alpha-7}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) la serie ha raggio di convergenza 1 per ogni $\alpha \geq 7$ (b) la serie converge assolutamente in $[-1,1]$ per ogni $\alpha \geq 7$ (c) la serie converge totalmente in $[-1,1]$ per ogni $\alpha > 7$ (d) per $\alpha = 7$ la funzione somma vale $s(x) = \log(1+x)$ per ogni $x \in]-1,1]$

le uniche corrette sono

$\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d)

---

6. Sia $f : dom(f) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+7x^3)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \in dom(f) \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire se

(a) f è continua in $(0,0)$,
(b) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$,
(c) f è differenziabile in $(0,0)$.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2+1}\,(y-3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;
(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;
(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;
(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]
