
Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

---

1. Siano T il bordo del triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ $(0,2)$ e $f(x,y) = \frac{e^x}{x+y+2}$. Detti m e M il minimo e il massimo di f su T si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0$, $M = \frac{e^2}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \frac{1}{4}$, $M = \frac{e^2}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{1}{4}$, $M = \frac{e}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = \frac{1}{5}$, $M = e^4$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{1}{4}$, $M = \frac{1}{3}$.

---

2. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} = F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = (e^y - \sin x)\,\vec{i} + xe^y\,\vec{j}.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) $\vec{F}$ è conservativo (b) $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = \pi$, dove Γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 3 percorsa una volta in senso antiorario (c) il campo scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da $\varphi(x,y) = xe^y + \sin x + 3$ è un potenziale per $\vec{F}$ (d) $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = \pi e - 2$, dove Γ è una curva che congiunge $(0,0)$ con $(\pi,1)$ (e) $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1\,,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (b), (e)

---

3. Il volume del solido $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \le 1,\;\; x^2+y^2-1 \le z \le 4-x-y\right\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{9}{2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{9}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: 9π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{2}\pi$

---

4. Siano dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{n^{\alpha-7}}{n+1} g(x-n)\,,$$

dove $g(x) = x^2 - 4$ per $|x| \le 2$, $g(x) = 0$ altrimenti. Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$ per ogni α (b) f_n converge uniformemente su $\mathbb{R}$ per ogni α (c) f_n converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se $\alpha < 8$ (d) vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[-1,1]$ per ogni α (e) vale il passaggio al limite sotto il segno di derivata su $[2,3]$ per ogni α

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a) (b) (d) $\boxed{\text{B}}$: (c) (d) (e) $\boxed{\text{C}}$: (c) (e) $\boxed{\text{D}}$: (a) (c) (d) (e) $\boxed{\text{E}}$: (a) (b) (e)

---

5. Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+n^2 e^{-(x-3)n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) l'insieme di convergenza puntuale è $(3,+\infty)$ (b) l'insieme di convergenza puntuale è $\mathbb{R}$ (c) la serie converge totalmente solo in ogni intervallo del tipo $[3+\varepsilon,+\infty)$, per ogni $\varepsilon > 0$ (d) la serie converge totalmente in $(3,+\infty)$ (e) la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e), $\boxed{\text{B}}$: (a), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c),

---

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|\sin x}{7x^2+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
(b) Calcolare, se esistono, le derivate direzionali in $(0,0)$.
(c) È valida l'uguaglianza $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ per ogni $\vec{v}$ versore di $\mathbb{R}^2$?
(d) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{\cos y}{\cos y + 2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ Al variare di $y_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;
(b) determinare le soluzioni stazionarie;
(c) studiare la monotonia della soluzione;
(d) calcolare i limiti agli estremi dell'intervallo di esistenza;
(e) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]
