Analisi Matematica II — 3 Febbraio 2014 — COMPITO 1

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizio 1: risposta esatta = +3; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0. Esercizi 2-4: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0. Esercizio 5: risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE questo foglio e TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. La lunghezza della curva di equazione parametrica $\vec{r}(t) = 6t^2\vec{\imath} + 4t^3\vec{\jmath}$, dove $t \in [-2, 2]$, vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $8(5^{3/2} - 1)$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $8 \cdot 5^{3/2}$ $\boxed{\text{D}}$: 8 $\boxed{\text{E}}$: $8(5^{1/2} - 1)$

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = e^{x^2} + e^{\frac{y^3}{3} - 4y}.$$

   Allora f ammette

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: un punto di massimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{B}}$: un punto di minimo relativo e un punto di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: due punti di sella $\boxed{\text{D}}$: due punti di minimo relativo $\boxed{\text{E}}$: un punto di minimo relativo e un punto di sella

---

3. L'integrale triplo

$$\iiint_T (2x + 2)\, dxdydz$$

   dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3 - (x^2 + y^2)\,, 1 \leq z \leq 2\}$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: -3π $\boxed{\text{D}}$: 3π $\boxed{\text{E}}$: 2π

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 6\sin^2 x & \text{se } 0 < x \leq \pi\,. \end{cases}$$

   Sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni (a) $a_0 = 3$ (b) $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (c) la serie di Fourier converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (d) la serie di Fourier non converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (e) $S(15\pi) = 0$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e)

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \sqrt{1 + \left|\frac{x}{2}\right|^n} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) l'insieme di convergenza puntuale I è $(-2, 2]$ (b) l'insieme di convergenza puntuale I è $(-2, 2)$ (c) converge uniformemente su I (d) converge uniformemente su $[-a, a]$ con $0 < a < 2$ (e) $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{0} f_n(x)\, dx = 0$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e)

---

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) f è continua in $(0,0)$?

   (b) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$?

   (c) vale $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ per ogni $\vec{v}$ versore di $\mathbb{R}^2$?

   (d) f è differenziabile in $(0,0)$?

   [**Punteggio: 4 punti**]

---

7. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2(e^{\cos y} - 1) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Discutere l'esistenza ed unicità **locale** e **globale** della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare le soluzioni stazionarie.

   (c) Studiare la monotonia della soluzione al variare di $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$.

   (d) Studiare la concavità/convessità della soluzione al variare di $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{3}{2}\pi$, discutendo l'esistenza di eventuali punti di flesso.

   [**Punteggio: 6 punti**]
