Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = 3y(x^3 - x).$$

Allora f ammette

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: due punti di massimo relativo e un punto di minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: tre punti di sella $\boxed{\text{C}}$: due punti di massimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{D}}$: due punti di minimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: cinque punti di sella

---

2. L'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \frac{3}{7}\sqrt{1+4x^2+6y}\,ds$$

dove Γ è l'arco di parabola $y = 2x^2$ con $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{3}$

---

3. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \le -2x^2, |x| \le 1, |y| \le 2\}$. Allora l'integrale doppio

$$\iint_D \left[\arctan(x(1-y^2)) + \frac{3}{4}\right] dxdy$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: $\arctan 2$ $\boxed{\text{E}}$: $\arctan 3$

---

4. Data la funzione 2π-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in $]-\pi,\pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-\cos x) & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e detta

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

la sua serie di Fourier, delle seguenti affermazioni

(a) $a_0 = 3\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$ (b) $a_1 = -\frac{3}{2}$ (c) $b_1 = 0$ (d) $S(\pi/2) = \frac{3}{2}$ (e) la serie di Fourier converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e)

---

5. Sia $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y^2+2} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $I = \mathbb{R}$ (b) $I \neq \mathbb{R}$ (c) $\tilde{y}$ è monotona crescente su I (d) $\tilde{y}$ è convessa su I (e) $\tilde{y}$ ammette un punto di flesso in I

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e)

---

6. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad x \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare l'insieme di convergenza puntuale I ed il limite puntuale distinguendo i casi $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$.

(b) Discutere nei tre casi la convergenza uniforme su I della successione.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Siano $\alpha \geq 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/4}} & \text{se } (x,y) \in A_\alpha \setminus \{(0,0)\} \\ \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_\alpha \end{cases}$$

con

$$A_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| \leq 3x^2 + \alpha\}$$

(a) Discutere la differenziabilità in $(0,0)$ nel caso $\alpha > 0$.

(b) Nel caso $\alpha = 0$ discutere i seguenti punti.

  (b_1) La continuità in $(0,0)$.

  (b_2) L'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$.

  (b_3) La differenziabilità in $(0,0)$.

[**Punteggio: 5 punti**]
