Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta $= +4$; risposta sbagliata $= -0.5$; risposta non data $= 0$.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2+8y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$, (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 8$, (d) esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, (e) f è differenziabile in $(0,0)$, le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (d), (e)

2. Data la curva Γ di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = (1-\cos t)\cos t\ \vec{i} + (1-\cos t)\sin t\ \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma 2\sqrt[4]{x^2+y^2}\ ds$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 4π $\boxed{\text{C}}$: $4\sqrt{2}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: π $\boxed{\text{E}}$: $\sqrt{2}\pi$

3. L'integrale
$$\iiint_T \frac{8\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\,dxdydz,$$
dove $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\leq x^2+y^2\leq 1,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq z\leq\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{3}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{8}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{3}$ $\boxed{\text{D}}$: π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2\pi}{3}$

---

4. Sia $\alpha>0$ e sia data la serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right),\qquad x\in\mathbb{R}.$$
Delle seguenti affermazioni

(a) la serie ha raggio di convergenza 2 per ogni $\alpha>0$ (b) l'insieme di convergenza puntuale è $I=[-2,2]$ per ogni $\alpha>0$ (c) l'insieme di convergenza puntuale è $I=[-2,2]$ per ogni $\alpha>1$ (d) la serie converge totalmente in $[-r,r]$ con $0<r<2$ per ogni $\alpha>0$ (e) la serie converge uniformemente in $[-2,0]$ per ogni $\alpha>0$, le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (d), (e)

---

5. Per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ sia
$$f_n(x)=\frac{x^3-nx}{x^2+n},\qquad x\in\mathbb{R}.$$
Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x)=0$ (b) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x)=-x$ (c) f_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x)=0$ (d) f_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x)=-x$ (e) f_n converge uniformemente alla funzione $f(x)=-x$ in $[-a,a]$, per ogni $a>0$, le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b) $\boxed{\text{D}}$: (a) $\boxed{\text{E}}$: (b), (e)

---

6. [**Punteggio: 5 punti**] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y)=4y^2-2y^4-x^2y^2.$$

---

7. [**Punteggio: 5 punti**] Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'=\log\left(y^2+\frac{e^2}{2}\right)-2\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$
Al variare di $y_0\in\mathbb{R}$ studiare:

a) l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

b) le soluzioni stazionarie e la monotonia della soluzione;

c) il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

d) la concavità/convessità della soluzione.
