Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma................................ .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left|\sin(x^2+y^2)-\arctan(x^2+y^2)\right|^{\alpha-1}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \geq \frac{4}{3}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > \frac{4}{3}$ (c) se $\alpha > \frac{4}{3}$, allora esiste $\nabla f(0,0)$ (d) se $\alpha > \frac{3}{2}$, allora esiste $\nabla f(0,0)$ (e) se $\alpha > \frac{4}{3}$, allora f è differenziabile in $(0,0)$ (f) se $\alpha > \frac{3}{2}$, allora f è differenziabile in $(0,0)$

   tutte e sole quelle corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

2. Sia T il triangolo di vertici $A = (-3,0)$, $O = (0,0)$ e $B = (0,3)$ e sia $g : T \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x,y) = \frac{1}{4}xy^2e^{y-x}$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0$ e $M = e^3$ $\boxed{\text{B}}$: $m = -\frac{1}{2}e^3$ e $M = 0$ $\boxed{\text{C}}$: $m = -e^3$ e $M = 0$ $\boxed{\text{D}}$: $m = -e^3$ e $M = e^{-3}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -e^{-3}$ e $M = e^3$ $\boxed{\text{F}}$: $m = -e^{-3}$ e $M = 0$

3. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = -\frac{xy}{\sqrt{y-x^2}}\,\vec{\imath} + \frac{3y-2x^2}{2\sqrt{y-x^2}}\,\vec{\jmath}$. L'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è l'arco di parabola $y = x^2 + 1$ percorso da $A = (0,1)$ verso $B = (1,2)$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: -2 $\boxed{\text{B}}$: 3 $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: 1 $\boxed{\text{E}}$: -3 $\boxed{\text{F}}$: 2

---

4. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = xy\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath}$ e la regione di piano T definita da $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \text{ e } x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$. L'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo il bordo di T percorso in senso antiorario vale (*suggerimento: utilizzare il teorema di Green...*)

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{6}{11}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{11}{60}$ $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{6}{11}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{11}{30}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{13}{20}$ $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{13}{60}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(e^x - \frac{2}{3}\right)^n e^{x+\frac{1}{n+1}}\,, \quad x \in [0,+\infty[\quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0,+\infty)$ (b) f_n converge puntualmente in $[0,\log\frac{5}{3}]$ (c) f_n converge uniformemente in $(0,+\infty)$ (d) f_n converge uniformemente in $[0,\log\frac{5}{3}]$ (e) f_n converge uniformemente in $[0,a]$ per ogni $0 < a < \log\frac{5}{3}$

(f) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\log\frac{5}{3}} f_n(x)\,dx = 0$,

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

---

6. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \frac{1}{e^{(\alpha-1)n}}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Dimostrare che la serie converge assolutamente su $\mathbb{R}$ se $\alpha \ge 1$;
(b) dimostrare che la serie converge totalmente su $\mathbb{R}$ se $\alpha > 1$;
(c) dimostrare che la serie converge totalmente sull'intervallo $[-M,M]$ per ogni $M > 0$ se $\alpha = 1$;
(d) dimostrare che la serie di funzioni converge solo per $x = 0$ nel caso $\alpha < 1$.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(1 - 7e^{-y}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.

Nel caso di $y_0 > \log 7$:

(c) determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione;

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]