Cognome e Nome... Matricola ....

Firma................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\beta > 0$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(|x|^\beta + |y|^\beta)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ per ogni $\beta > 0$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\beta > \frac{3}{2}$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\beta > 2$ altrimenti $\nexists\ \nabla f(0,0)$ (d) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\beta > 0$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\beta > 2$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ per ogni $\beta > 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x[(x-1)^2 + y^2 - 1]$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di massimo relativo e $(0,0)$ è di sella $\boxed{\text{B}}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di minimo relativo e $(0,0)$ è di minimo relativo $\boxed{\text{C}}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di minimo relativo e $(0,0)$ è di sella $\boxed{\text{D}}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di sella e $(0,0)$ è di sella $\boxed{\text{E}}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di massimo relativo e $(0,0)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di sella e $(0,0)$ è di massimo relativo

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2)\,\vec{i} + (x^2-y^2)\,\vec{j}$, l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ la circonferenza di centro $(0,0)$, raggio 1 percorsa in senso antiorario, vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: -2 $\boxed{\text{E}}$: -3 $\boxed{\text{F}}$: -1

---

4. L'area della superficie del paraboloide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\,;\ 0 \le z \le 1\}$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(3)^{3/2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{2}{3}\pi(3)^{3/2}+1$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{2}{3}(3)^{3/2}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{2}{3}\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2}{3}\pi\left[(3)^{3/2}-1\right]$ $\boxed{\text{F}}$: 2π

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n^2}{n^2+(\frac{x}{7})^{2n}}\right), \quad x \in [0,+\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) f_n converge puntualmente in $[0,+\infty)$ (b) f_n converge puntualmente solo in $[0,7]$ (c) f_n converge uniformemente in $[0,+\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $[0,+\infty)$ (e) f_n converge uniformemente in $[0,7]$ (f) f_n converge uniformemente in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 7$

   tutte e sole quelle corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

---

6. Studiare al variare di $\beta \ge 0$ la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^{n(\beta+1)}}{\left(n! + \beta\,\log(n^2)\right)^{1-\frac{\beta}{7}}}, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

   Per $\beta = 0$, calcolare la somma $S(x)$ della serie.

   [**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(e^y-1)(2-e^y)}{e^y} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

   Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;
   (b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;
   (c) studiare la concavità/convessità della soluzione.

   Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^+$:

   (d) determinare T_{max} (l'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza) e, se esiste, calcolare $\lim_{t \to T_{max}} y(t)$.

[**Punteggio: 5 punti**]