Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizio 1: risposta esatta = +3; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0; esercizi 2-4: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE il foglio A con TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni

   (a) $b_n = 0\ \forall n \geq 1$; $a_n = 0\ \forall n \geq 2$ (b) $b_n = 0\ \forall n \geq 2$; $a_n = 0\ \forall n \geq 1$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$ converge (d) $a_0 = 1$; le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: b d $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b c $\boxed{\text{D}}$: c $\boxed{\text{E}}$: a $\boxed{\text{F}}$: a d

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{z}{48}\, dS$,

   dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{2xy}\,, 1 \leq x \leq 7\,, 1 \leq y \leq 7\}$.

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 6 $\boxed{\text{B}}$: 7π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{48}$ $\boxed{\text{D}}$: 48 $\boxed{\text{E}}$: 49 $\boxed{\text{F}}$: 6π

---

3. Si consideri la funzione $g(x, y) = |x - y|^3$ definita sul rettangolo $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$. Siano m il minimo e M il massimo di g su Q. Delle seguenti affermazioni

   (a) g ammette infiniti punti di massimo (b) g ammette infiniti punti di minimo (c) $m = 0$ (d) $M = 3^3$ (e) $m = 1$ (f) $M = 4^3$; le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b c $\boxed{\text{B}}$: a d e $\boxed{\text{C}}$: e f $\boxed{\text{D}}$: c d $\boxed{\text{E}}$: c f $\boxed{\text{F}}$: b c d

---

4. Sia Γ il bordo orientato (in senso antiorario) della semicorona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e contenuta nel semispazio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0\}$. Calcolare

   $$I = \int_\Gamma \left(\frac{2}{7}y^2 - e^{\sin x}\right) dx + \left(\frac{1}{7}xy + \sqrt{y^7 + 1}\right) dy$$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 3 $\boxed{\text{B}}$: −3 $\boxed{\text{C}}$: −2 $\boxed{\text{D}}$: π $\boxed{\text{E}}$: -2π $\boxed{\text{F}}$: -3π

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{\arctan(nx)}{n}.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

....

Risposta [4 punti]:

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log\left(1+\frac{7x}{n}\right)}{(7x+n)^2}, \quad x \geq 0\,,$$

discuterne la convergenza puntuale e totale.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^2y^2}{(x^2+y^2)(|x|+|y|)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

....

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2)e^y\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

....

Risposta [5 punti]:

---

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ e prolungata per periodicità; sia $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni

   (a) $b_n = 0\ \forall n \geq 1$; $a_n = 0\ \forall n \geq 2$ (b) $b_n = 0\ \forall n \geq 2$; $a_n = 0\ \forall n \geq 1$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$ converge (d) $a_0 = 1$; le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: b d $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b c $\boxed{\text{D}}$: c $\boxed{\text{E}}$: a $\boxed{\text{F}}$: a d

---

2. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S \frac{z}{48}\, dS$,

   dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{2xy}\,, 1 \leq x \leq 7\,, 1 \leq y \leq 7\,\}$.

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 6 $\boxed{\text{B}}$: 7π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{48}$ $\boxed{\text{D}}$: 48 $\boxed{\text{E}}$: 49 $\boxed{\text{F}}$: 6π

---

3. Si consideri la funzione $g(x, y) = |x - y|^3$ definita sul rettangolo $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$. Siano m il minimo e M il massimo di g su Q. Delle seguenti affermazioni

   (a) g ammette infiniti punti di massimo (b) g ammette infiniti punti di minimo (c) $m = 0$ (d) $M = 3^3$ (e) $m = 1$ (f) $M = 4^3$; le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b c $\boxed{\text{B}}$: a d e $\boxed{\text{C}}$: e f $\boxed{\text{D}}$: c d $\boxed{\text{E}}$: c f $\boxed{\text{F}}$: b c d

---

4. Sia Γ il bordo orientato (in senso antiorario) della semicorona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e contenuta nel semispazio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0\,\}$. Calcolare

$$I = \int_\Gamma \left(\frac{2}{7}y^2 - e^{\sin x}\right) dx + \left(\frac{1}{7}xy + \sqrt{y^7 + 1}\right) dy$$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 3 $\boxed{\text{B}}$: -3 $\boxed{\text{C}}$: -2 $\boxed{\text{D}}$: π $\boxed{\text{E}}$: -2π $\boxed{\text{F}}$: -3π

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ così definita in $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{\arctan(nx)}{n}.$$

   Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

   ....

   Risposta [4 punti]:

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log\left(1+\frac{7x}{n}\right)}{(7x+n)^2}, \quad x \geq 0\,,$$

discuterne la convergenza puntuale e totale.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^2y^2}{(x^2+y^2)(|x|+|y|)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità di f in $(0,0)$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2)e^y\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, la monotonia, asintoti, concavità e flessi delle soluzioni. L'intervallo massimale è illimitato a destra e/o a sinistra per qualche valore di y_0?

. . . .

Risposta [5 punti]:
