Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = $-0,5$; risposta non data = 0.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(7x)\log(1+\sin^2 y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua su $\mathbb{R}^2$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) $\nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (d) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ (f) f ammette derivate direzionali in $(0,0)$ rispetto ad ogni versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e si ha $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 7v_1v_2^2$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e), (f)

2. Siano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x+y \le 2\,, 0 \le y \le 2\} \text{ e } g(x,y) = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\,.$$

Detti $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0$ e $M = \sqrt{17}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 0$ e $M = \sqrt{5}$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 1$ e $M = \sqrt{5}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = \sqrt{5}$ e $M = \sqrt{17}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $M = \sqrt{17}$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $M = \sqrt{5}$

---

3. La lunghezza della curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{\imath} + \sin^3 t\,\vec{\jmath}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 3 $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: π $\boxed{\text{F}}$: 2π

---

4. L'integrale

$$\iiint_T [xy + xz + y^2 z]\, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2+y^2 \le z,\; 0 \le z \le 2\}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: 3π $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $-\pi$ $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log\left(1 + \frac{2x^{2n}}{n}\right), \quad x \in [0,+\infty[, \quad n \ge 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$ (b) f_n converge puntualmente su $[0,1)$ alla funzione identicamente nulla (c) f_n converge puntualmente su $[0,1]$ alla funzione identicamente nulla (d) f_n converge uniformemente in $[0,a]$ per ogni $a < 1$ (e) f_n non converge uniformemente in $[0,1)$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} f_n(x)\,dx = 2$,

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [\log(n^{3\beta} + x\sqrt{n}) - \log(n^{3\beta}+1)], \quad x \in [1,+\infty[\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-2}{e^y+2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]