Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\sin^2(xy)} - \cos(xy)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\right)^{\alpha+1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_α continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 7$ (b) f_α è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 7$ (c) $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 6$ (e) f_α ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 6$ (f) f_α ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 6$,

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (f)

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = y^2 \log\big(x-2\big) - 7x + x^2$, definita nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\}$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di massimo relativo, $(3,1)$ è di minimo relativo e $(3,-1)$ è di sella $\boxed{\text{B}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di minimo relativo, $(3,1)$ è di sella e $(3,-1)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di minimo relativo e $(3,\pm 1)$ sono di sella $\boxed{\text{D}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di massimo relativo e $(3,\pm 1)$ sono di minimo relativo $\boxed{\text{E}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di sella, $(3,1)$ è di minimo relativo e $(3,-1)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: $(\frac{7}{2}, 0)$ è di sella, $(3,1)$ è di massimo relativo e $(3,-1)$ è di minimo relativo

---

3. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \sqrt{3}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\vec{j} + \sqrt{3}t^2\,\vec{k}, \quad t \in [0, \sqrt{3}];$$

la sua lunghezza vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3\sqrt{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $2\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $4\sqrt{3}$ $\boxed{\text{D}}$: 4 $\boxed{\text{E}}$: 3 $\boxed{\text{F}}$: 2

---

4. L'integrale di superficie

$$\iint_S y\,dS$$

dove S è la superficie data da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y^2,\ (x,y) \in T\}$ con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{26\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ $\boxed{\text{C}}$: $2\sqrt{3}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{13\sqrt{3}}{7}$ $\boxed{\text{E}}$: 0 $\boxed{\text{F}}$: $\frac{13\sqrt{2}}{3}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^7 x e^{-n\frac{9x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \ge 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) f_n converge puntualmente solo in $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ (c) f_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (d) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = 0$ (e) f_n converge uniformemente in $[-a,a]$ per ogni $0 < a < \frac{1}{3}$ (f) f_n converge uniformemente in $[A, +\infty)$ per ogni $A \ge 1$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e), $\boxed{\text{F}}$: (b)

---

6. Sia $\alpha > 3$ e si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{|x|} + 7}{n+2} \arctan\left(\frac{x^2}{(\log(n))^{\alpha-3}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Al variale di $\alpha > 3$ studiare la convergenza puntuale della serie e la convergenza totale in $\mathbb{R}$ e in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = t\,\dfrac{y\arctan y}{1+y^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) determinare le eventuali simmetrie della soluzione;

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]