
Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

---

1. Siano T il bordo di
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\, y\ge 0,\ y-x\ge 0,\ y+|x|\le 2\}$$
e
$$f(x,y)=x^2+(y-1)^2.$$
Detti $M=\max_T f$ e $m=\min_T f$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m=1$ e $M=5$ $\boxed{\text{B}}$: $m=0$ e $M=1$ $\boxed{\text{C}}$: $m=1/2$ e $M=5$ $\boxed{\text{D}}$: $m=0$ e $M=5$ $\boxed{\text{E}}$: $m=1/2$ e $M=1$

---

2. Data la curva Γ di rappresentazione parametrica
$$\vec{r}(t)=\frac{1-3t^2}{2}\vec{i}+3t\vec{j}+\frac{1+3t^2}{2}\vec{k},\qquad t\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$
l’integrale curvilineo $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{\left[1+2\left(\frac{y}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,ds$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\ln 2$ $\boxed{\text{B}}$: $3\sqrt{2}\ln 2$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3\pi}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3\pi}{4}\sqrt{2}$

---

3. L'integrale $\iiint_D 3z\,dxdydz$ dove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{x^2+2y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{4}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: 3π $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{8}\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{3}{8}$

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n!)^{3\alpha}\frac{x^{2n+3}}{(2n+2)!}$, il raggio di convergenza è dato da

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $+\infty$ se $\alpha \neq \frac{2}{3}$, 4 se $\alpha = \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $+\infty$ se $\alpha > \frac{2}{3}$, 2 se $\alpha = \frac{2}{3}$, 0 se $\alpha < \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $+\infty$ se $\alpha < \frac{2}{3}$, 2 se $\alpha = \frac{2}{3}$, 0 se $\alpha > \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{D}}$: 2 se $\alpha = \frac{2}{3}$, $+\infty$ se $\alpha \neq \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: 4 se $\alpha \ge \frac{2}{3}$, $+\infty$ se $\alpha < \frac{2}{3}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{7\alpha}\ln(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (b) f ammette derivate parziali in $(0,0)$ per $\alpha \ge \frac{1}{7}$ (c) f ammette derivate parziali in $(0,0)$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (d) f è differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha > \frac{1}{7}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (e)

---

6. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = x^{2n-1}\ln\left(x^{2n}+2\right), \qquad x \in \mathbb{R}, n \ge 1.$$

(a) Determinare l'insieme di convergenza puntaule I ed il limite puntuale $f : I \to \mathbb{R}$ della successione.
(b) Discutere la convergenza uniforme su I e sugli intervalli del tipo $[-a,a] \subseteq I$.
(c) Verificare la validità del passaggio al limite sotto il segno di integrale sull'intervallo $[0,1]$.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \arctan(y^2-4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;
(b) determinare le soluzioni stazionarie;
(c) studiare la monotonia della soluzione;
(d) calcolare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione;
(e) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]
