Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(2xy^2) - x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) $\nabla f\,(0,0) = (0,0)$ (d) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1v_2(2v_2 - v_1)$ per ogni direzione $v = (v_1,v_2)$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ (f) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot v$ per ogni direzione v.

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d), $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = y + \dfrac{x}{3}$ e sia $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x-\frac{1}{2})^2 \leq y \leq \frac{1}{4} - \frac{x}{3}\}$. Allora detto $m = \min_{(x,y)\in T} f(x,y)$ e $M = \max_{(x,y)\in T} f(x,y)$ si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{5}{16}$, $M = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \frac{5}{36}$, $M = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 0$, $M = \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = \frac{1}{9}$, $M = 1$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{5}{36}$, $M = \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{1}{3}$, $M = 2$

3. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\,\vec{i} + (\sin t - t\cos t)\,\vec{j} \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'integrale curvilineo $\int_\Gamma (x^2+y^2)\,ds$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3(2\pi^2+4\pi^4)$ $\boxed{\text{B}}$: $(2\pi^2+4\pi^4)$ $\boxed{\text{C}}$: $(\pi^2+2\pi^4)$ $\boxed{\text{D}}$: 1 $\boxed{\text{E}}$: $\pi+1$ $\boxed{\text{F}}$: $1+2\pi^2$

---

4. Sia T il trapezio di vertici $A = (1,0)$, $B = (1,1)$, $C = (3,3)$, $D = (3,0)$. L'integrale

$$\iint_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{4}\log(3)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: $\log(3)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{2}\log(3)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{\pi}\log(2)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{3}\log 4$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(\frac{n+2}{n+1} + (e-1)(7x)^{2n}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) f_n converge puntualmente solo in $[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}]$ (c) f_n converge puntualmente solo in $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ (d) f_n converge uniformemente in $[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}]$ (e) f_n non converge uniformemente in $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ (f) f_n converge uniformemente in $[-a, a]$ per ogni $0 < a < \frac{1}{7}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n!)^{\alpha-2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Al variare di α determinare il raggio di convergenza della serie e l'insieme di convergenza puntuale. Per $\alpha = 2$ determinare inoltre l'insieme di convergenza uniforme e la somma della serie.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^t\left(1 - e^{49-y^2}\right) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

(d) nel caso $y_0 > 7$, studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]