Cognome e Nome.............................................. Matricola .......................

Firma.................. .................. Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B |
| C | C | C | C | C |
| D | D | D | D | D |
| E | E | E | E | E |
| F | F | F | F | F |

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(e^{x^2y^4} - 1)}{(x^2+y^2)^{\alpha-3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f$ continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 6$ (b) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 6$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\nabla f(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 7$ (e) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq \frac{11}{2}$ (f) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{11}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{A}$ : (a), (d), (e) $\boxed{B}$ : (b), (c) $\boxed{C}$ : (a), (e) $\boxed{D}$ : (a), (c) $\boxed{E}$ : (b), (d), (f) $\boxed{F}$ : (b), (c), (f)

2. Siano $T$ il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y| - 2 \leq x \leq 4 - y^2\}$$

e $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{2} + y\right)$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

*Risp.:* $\boxed{A}$ : $m = -4$ e $M = 8$ $\boxed{B}$ : $m = -10$ e $M = 10$ $\boxed{C}$ : $m = -8$ e $M = 10$ $\boxed{D}$ : $m = -4$

e $M=4$ $\boxed{\text{E}}$ : $m=-8$ e $M=8$ $\boxed{\text{F}}$ : $m=-10$ e $M=4$

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \sqrt{4+3x^2}\,\mathrm{d}s,$$

ove $\Gamma$ è l'ellisse di equazione $4x^2+y^2=16$, vale

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $0$ $\boxed{\text{B}}$ : $10\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $16\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $20\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $4\pi$ $\boxed{\text{F}}$ : $6\pi$

---

4. Il volume della regione $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\le z\le -2y\}$ è

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{3}{2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ : $\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $2\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{F}}$ : $\frac{5}{2}\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{\log n+2}{1+\log(n^4)+nx^2},\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\ge 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (d) $f_n$ converge puntualmente solo in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (e) $f_n$ converge uniformemente in $(-\infty,-A]\cup[A,+\infty)$ per ogni $A>0$ (f) $\lim_{n\to\infty}\int_{1/2}^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (b), (c). (d), (e) $\boxed{\text{B}}$ : (a), (f) $\boxed{\text{C}}$ : (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$ : (c), (d) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (b), (e)

---

6. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin^k(2x)}{k}[(2k+1)!]^{\alpha-1},\qquad x\in[0,2\pi],\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

(a) determinare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) determinare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

(c) per $\alpha=1$ calcolare la funzione somma.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\log(y^2+1)+\arctan(\log(y^2+1))\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$

Al variare di $y_0\in\mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione [per verificare l'ipotesi di crescita sublineare, potrebbe essere utile ricordare la disuguaglianza $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ per ogni $a, b \geq 0$];

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

---

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome............................................ Matricola ......................

Firma.................. .................. Corso di Laurea: ◊ AUTL; ◊ MATL; ◊ MECL

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B |
| C | C | C | C | C |
| D | D | D | D | D |
| E | E | E | E | E |
| F | F | F | F | F |

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(e^{x^2y^4}-1)}{(x^2+y^2)^{\alpha-5}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f$ continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 8$ (b) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 8$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\nabla f(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 9$ (e) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq \frac{15}{2}$ (f) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{15}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (b), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$ : (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$ : (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$ : (b), (c) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (e) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (c)

2. Siano $T$ il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 3 \leq x \leq 9 - y^2\}$$

e $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{3} + y\right)$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $m = -15$ e $M = 4$ $\boxed{\text{B}}$ : $m = -4$ e $M = 4$ $\boxed{\text{C}}$ : $m = -12$ e $M = 15$ $\boxed{\text{D}}$ : $m = -12$

e $M = 12$ $\boxed{\text{E}}$ : $m = -4$ e $M = 12$ $\boxed{\text{F}}$ : $m = -15$ e $M = 15$

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \sqrt{4 + 8x^2}\, \mathrm{d}s,$$

ove $\Gamma$ è l'ellisse di equazione $9x^2 + y^2 = 36$, vale

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $10\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $7\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $0$ $\boxed{\text{D}}$ : $36\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $20\pi$ $\boxed{\text{F}}$ : $40\pi$

---

4. Il volume della regione $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \le z \le -3 - 4y\}$ è

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{9}{2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ : $4\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{F}}$ : $\frac{5}{2}\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log n + 4}{1 + \log(n^6) + nx^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \ge 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (d) $f_n$ converge puntualmente solo in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (e) $f_n$ converge uniformemente in $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_{1/3}^{3} f_n(x)\, \mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$ : (c), (d) $\boxed{\text{C}}$ : (a), (b), (e) $\boxed{\text{D}}$ : (b), (c). (d), (e) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (f)

---

6. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin^k(2x)}{k} [(2k + 1)!]^{\alpha - 2}, \qquad x \in [0, 2\pi], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

(c) per $\alpha = 2$ calcolare la funzione somma.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2 + 1) + \arctan(\log(y^2 + 1)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione [per verificare l'ipotesi di crescita sublineare, potrebbe essere utile ricordare la disuguaglianza $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ per ogni $a, b \geq 0$];

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

---

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.............................................. Matricola .......................

Firma.................. .................. Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = $-0,5$; risposta non data = 0.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B |
| C | C | C | C | C |
| D | D | D | D | D |
| E | E | E | E | E |
| F | F | F | F | F |

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(e^{x^2y^4}-1)}{(x^2+y^2)^{\alpha-7}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f$ continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 10$ (b) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 10$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\nabla f(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 11$ (e) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq \frac{19}{2}$ (f) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{19}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (a), (e) $\boxed{\text{B}}$ : (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$ : (b), (c), (f) $\boxed{\text{D}}$ : (b), (c) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (c) $\boxed{\text{F}}$ : (b), (d), (f)

2. Siano $T$ il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |y| - 4 \leq x \leq 16 - y^2\}$$

e $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{4} + y\right)$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $m = -20$ e $M = 20$ $\boxed{\text{B}}$ : $m = -4$ e $M = 4$ $\boxed{\text{C}}$ : $m = -16$ e $M = 16$

$\boxed{\text{D}}$ : $m = -20$ e $M = 4$ $\boxed{\text{E}}$ : $m = -4$ e $M = 16$ $\boxed{\text{F}}$ : $m = -16$ e $M = 20$

---

3. L'integrale
$$\int_\Gamma \sqrt{4 + 15x^2}\,\mathrm{d}s,$$
ove $\Gamma$ è l'ellisse di equazione $16x^2 + y^2 = 64$, vale

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $68\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $0$ $\boxed{\text{C}}$ : $14\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $20\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $34\pi$ $\boxed{\text{F}}$ : $64\pi$

---

4. Il volume della regione $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq z \leq -8 - 6y\}$ è

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{7}{2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{13}{2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{E}}$ : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{F}}$ : $6\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{\log n + 6}{1 + \log(n^8) + nx^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$
Delle seguenti affermazioni

(a) $f_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (d) $f_n$ converge puntualmente solo in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (e) $f_n$ converge uniformemente in $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_{1/4}^{4} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (c), (d) $\boxed{\text{B}}$ : (a), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$ : (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$ : (b), (c). (d), (e) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (b), (e) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (f)

---

6. Si consideri la serie di potenze
$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin^k(2x)}{k} [(2k+1)!]^{\alpha-3}, \qquad x \in [0, 2\pi], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

   (b) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

   (c) per $\alpha = 3$ calcolare la funzione somma.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \log(y^2 + 1) + \arctan(\log(y^2 + 1)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione [per verificare l'ipotesi di crescita sublineare, potrebbe essere utile ricordare la disuguaglianza $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ per ogni $a, b \geq 0$];

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

---

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome................................................ Matricola .......................

Firma.................. .................. Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B |
| C | C | C | C | C |
| D | D | D | D | D |
| E | E | E | E | E |
| F | F | F | F | F |

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(e^{x^2y^4}-1)}{(x^2+y^2)^{\alpha-9}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f$ continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 12$ (b) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 12$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\nabla f(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 13$ (e) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq \frac{23}{2}$ (f) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{23}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{A}$ : (a), (d), (e) $\boxed{B}$ : (b), (c) $\boxed{C}$ : (b), (c), (f) $\boxed{D}$ : (a), (e) $\boxed{E}$ : (a), (c) $\boxed{F}$ : (b), (d), (f)

2. Siano $T$ il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 5 \leq x \leq 25 - y^2\}$$

e $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{5} + y\right)$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

*Risp.:* $\boxed{A}$ : $m = -4$ e $M = 20$ $\boxed{B}$ : $m = -20$ e $M = 25$ $\boxed{C}$ : $m = -25$ e $M = 25$

$\boxed{\text{D}}$ : $m = -4$ e $M = 4$ $\boxed{\text{E}}$ : $m = -20$ e $M = 20$ $\boxed{\text{F}}$ : $m = -25$ e $M = 4$

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \sqrt{4 + 24x^2}\,\mathrm{d}s,$$

ove $\Gamma$ è l'ellisse di equazione $25x^2 + y^2 = 100$, vale

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : 0 $\boxed{\text{B}}$ : $52\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $100\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $104\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $34\pi$ $\boxed{\text{F}}$ : $18\pi$

---

4. Il volume della regione $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \le z \le -15 - 8y\}$ è

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{9}{2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $8\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{F}}$ : $\frac{17}{2}\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log n + 8}{1 + \log(n^{10}) + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \ge 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (d) $f_n$ converge puntualmente solo in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (e) $f_n$ converge uniformemente in $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_{1/5}^{5} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (b), (c). (d), (e) $\boxed{\text{B}}$ : (a), (f) $\boxed{\text{C}}$ : (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$ : (c), (d) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (b), (e) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin^k(2x)}{k} [(2k+1)!]^{\alpha-4}, \qquad x \in [0, 2\pi], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.
(b) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.
(c) per $\alpha = 4$ calcolare la funzione somma.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2 + 1) + \arctan(\log(y^2 + 1)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione [per verificare l'ipotesi di crescita sublineare, potrebbe essere utile ricordare la disuguaglianza $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ per ogni $a, b \geq 0$];

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

---

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.............................................. Matricola .......................

Firma.................. .................. Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B |
| C | C | C | C | C |
| D | D | D | D | D |
| E | E | E | E | E |
| F | F | F | F | F |

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(e^{x^2y^4} - 1)}{(x^2+y^2)^{\alpha-11}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f$ continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 14$ (b) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 14$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\nabla f(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 15$ (e) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq \frac{27}{2}$ (f) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{27}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$ : (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$ : (b), (c) $\boxed{\text{D}}$ : (a), (e) $\boxed{\text{E}}$ : (b), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (c)

2. Siano $T$ il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 6 \leq x \leq 36 - y^2\}$$

e $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{6} + y\right)$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $m = -30$ e $M = 4$ $\boxed{\text{B}}$ : $m = -4$ e $M = 4$ $\boxed{\text{C}}$ : $m = -24$ e $M = 24$ $\boxed{\text{D}}$ : $m = -4$

e $M = 24$ $\boxed{\text{E}}$ : $m = -24$ e $M = 30$ $\boxed{\text{F}}$ : $m = -30$ e $M = 30$

---

3. L'integrale
$$\int_\Gamma \sqrt{4 + 35x^2}\,\mathrm{d}s,$$
ove $\Gamma$ è l'ellisse di equazione $36x^2 + y^2 = 144$, vale

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $52\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $148\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $22\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $0$ $\boxed{\text{E}}$ : $144\pi$ $\boxed{\text{F}}$ : $74\pi$

---

4. Il volume della regione $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le z \le -24 - 10y\}$ è

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{21}{2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $10\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{F}}$ : $\frac{11}{2}\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{\log n + 10}{1 + \log(n^{12}) + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \ge 1.$$
Delle seguenti affermazioni

(a) $f_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (d) $f_n$ converge puntualmente solo in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (e) $f_n$ converge uniformemente in $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_{1/6}^{6} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (a), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$ : (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$ : (c), (d) $\boxed{\text{D}}$ : (a), (b), (e) $\boxed{\text{E}}$ : (b), (c). (d), (e) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (f)

---

6. Si consideri la serie di potenze
$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin^k(2x)}{k} [(2k+1)!]^{\alpha-5}, \qquad x \in [0, 2\pi], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.
   (b) determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.
   (c) per $\alpha = 5$ calcolare la funzione somma.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \log(y^2 + 1) + \arctan(\log(y^2 + 1)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione [per verificare l'ipotesi di crescita sublineare, potrebbe essere utile ricordare la disuguaglianza $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$ per ogni $a, b \geq 0$];

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

---

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome............................................ Matricola .......................

Firma.................. .................. Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B |
| C | C | C | C | C |
| D | D | D | D | D |
| E | E | E | E | E |
| F | F | F | F | F |

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(e^{x^2y^4}-1)}{(x^2+y^2)^{\alpha-13}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $f$ continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 16$ (b) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 16$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\nabla f(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 17$ (e) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq \frac{31}{2}$ (f) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{31}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (a), (e) $\boxed{\text{B}}$ : (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$ : (b), (c) $\boxed{\text{D}}$ : (b), (c), (f) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (c) $\boxed{\text{F}}$ : (b), (d), (f)

2. Siano $T$ il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 7 \leq x \leq 49 - y^2\}$$

e $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{7} + y\right)$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $m = -35$ e $M = 35$ $\boxed{\text{B}}$ : $m = -28$ e $M = 35$ $\boxed{\text{C}}$ : $m = -4$ e $M = 4$ $\boxed{\text{D}}$ : $m =$

$-28$ e $M=28$ $\boxed{\text{E}}$ : $m=-35$ e $M=4$ $\boxed{\text{F}}$ : $m=-4$ e $M=28$

---

3. L'integrale
$$\int_\Gamma \sqrt{4+48x^2}\,\mathrm{d}s,$$
ove $\Gamma$ è l'ellisse di equazione $49x^2+y^2=196$, vale

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $200\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $0$ $\boxed{\text{C}}$ : $26\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $74\pi$ $\boxed{\text{E}}$ : $100\pi$ $\boxed{\text{F}}$ : $196\pi$

---

4. Il volume della regione $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\le z\le -35-12y\}$ è

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{13}{2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{25}{2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{E}}$ : $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{F}}$ : $12\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x)=\frac{\log n+12}{1+\log(n^{14})+nx^2},\qquad x\in\mathbb{R},\qquad n\ge 1.$$
Delle seguenti affermazioni

(a) $f_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (d) $f_n$ converge puntualmente solo in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (e) $f_n$ converge uniformemente in $(-\infty,-A]\cup[A,+\infty)$ per ogni $A>0$ (f) $\lim_{n\to\infty}\int_{1/7}^{7} f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$

tutte e sole quelle corrette sono

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : (c), (d) $\boxed{\text{B}}$ : (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$ : (b), (c). (d), (e) $\boxed{\text{D}}$ : (a), (b), (e) $\boxed{\text{E}}$ : (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$ : (a), (f)

---

6. Si consideri la serie di potenze
$$\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin^k(2x)}{k}[(2k+1)!]^{\alpha-6},\qquad x\in[0,2\pi],\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$
   (a) determinare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.
   (b) determinare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.
   (c) per $\alpha=6$ calcolare la funzione somma.

   [**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'=\log(y^2+1)+\arctan(\log(y^2+1))\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$
Al variare di $y_0\in\mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione [per verificare l'ipotesi di crescita sublineare, potrebbe essere utile ricordare la disuguaglianza $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ per ogni $a, b \geq 0$];

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

---

[**Punteggio: 5 punti**]