Cognome e Nome... Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha y^2} - \cos(2y) + \sin(x^2)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$ (b) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (d) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$ (e) per $\alpha = 2$ si ha $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{B}$: (b), (c) $\boxed{C}$: (b), (e), (f) $\boxed{D}$: (a), (e), (f) $\boxed{E}$: (a), (f) $\boxed{F}$: (a), (c), (d)

---

2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = y + \frac{x^2}{4y} - \log x$. Dopo aver determinato i punti stazionari di f in A, allora

Risp.: $\boxed{A}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 1, \frac{1}{2})$ che risultano essere entrambi punti di minimo relativo $\boxed{B}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: f ha due punti stazionari $P_{\pm} = (\pm 1, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: f ha due punti stazionari $P_{\pm} = (\pm 1, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella

---

3. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0, \pi]$. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $-2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ $\boxed{\text{E}}$: $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ $\boxed{\text{F}}$: $-\sqrt{6}$

---

4. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = 2z \arctan y^2\,\vec{i} + z^2 \log(x^4 + 1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Sia $\mathcal{S}$ la superficie chiusa che è frontiera del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ e sia $\vec{n}$ il versore normale uscente da $\mathcal{S}$. Allora $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: 1 $\boxed{\text{D}}$: 2 $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{3}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha - 2} e^{-n^2 \sqrt{x}}, \quad x \in [0, +\infty), \quad n \ge 1.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $I = [0, +\infty)$ (b) per $\alpha \le 2$ si ha $I = [0, +\infty)$ e per $\alpha > 2$ si ha $I = (0, +\infty)$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in I per $\alpha < 2$ e non converge uniformemente in I per $\alpha \ge 2$ (e) f_n converge uniformemente in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ per $\alpha \ge 2$ (f) $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$ per $\alpha < 2$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha}\right) - \cos\left(\dfrac{e^x}{n^\alpha}\right)\right)^2}{\log(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Per $\alpha > \frac{1}{4}$ stabilire se la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{4x}}{n^{4\alpha} \log(n)}$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$ o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{t^2 + 1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e di unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.

(c) Nel caso $y_0 = 0$ studiare l'eventuale simmetria della soluzione e studiarne la concavità e convessità.

(d) Nel caso $y_0 < 2$ stabilire se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha y^2} - \cos(3y) + \sin(x^2)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{9}{2}$ (b) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (d) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{9}{2}$ (e) per $\alpha = \frac{9}{2}$ si ha $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{9}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = 2y + \frac{x^2}{4y} - 2\log x$. Dopo aver determinato i punti stazionari di f in A, allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 2, \frac{1}{2})$ che risultano essere entrambi punti di

minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (2, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (2, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (2, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 2, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 2, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella

---

3. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0, \pi]$. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ $\boxed{\text{E}}$: $-\sqrt{6}$ $\boxed{\text{F}}$: $-2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

---

4. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = 3z \arctan y^2\,\vec{i} + z^3 \log(x^4+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Sia $\mathcal{S}$ la superficie chiusa che è frontiera del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ e sia $\vec{n}$ il versore normale uscente da $\mathcal{S}$. Allora $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: 1 $\boxed{\text{D}}$: 2 $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{3}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha-3} e^{-n^2\sqrt{x}}, \quad x \in [0, +\infty), \quad n \ge 1.$$

   Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

   (a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $I = [0, +\infty)$ (b) per $\alpha \le 3$ si ha $I = [0, +\infty)$ e per $\alpha > 3$ si ha $I = (0, +\infty)$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in I per $\alpha < 3$ e non converge uniformemente in I per $\alpha \ge 3$ (e) f_n converge uniformemente in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ per $\alpha \ge 3$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ per $\alpha < 3$

   tutte e sole quelle corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha}\right) - \cos\left(\dfrac{e^x}{n^\alpha}\right)\right)^4}{\log(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il suo insieme di convergenza puntuale.

   (b) Per $\alpha > \frac{1}{8}$ stabilire se la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{8x}}{n^{8\alpha} \log(n)}$$

   converge totalmente in $\mathbb{R}$ o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 9}{t^2 + 1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e di unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.

(c) Nel caso $y_0 = 0$ studiare l'eventuale simmetria della soluzione e studiarne la concavità e convessità.

(d) Nel caso $y_0 < 3$ stabilire se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha y^2} - \cos(4y) + \sin(x^2)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 8$ (b) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (d) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se e solo se $\alpha = 8$ (e) per $\alpha = 8$ si ha $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 8$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = 3y + \frac{x^2}{4y} - 3\log x$. Dopo aver determinato i punti stazionari di f in A, allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 3, \frac{1}{2})$ che risultano essere entrambi punti di minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (3, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (3, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di sella $\boxed{\text{D}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 3, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{\text{E}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 3, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella $\boxed{\text{F}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (3, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di minimo relativo

---

3. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0, \pi]$. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ $\boxed{\text{B}}$: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{D}}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ $\boxed{\text{F}}$: $-\sqrt{6}$

---

4. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = 4z \arctan y^2\,\vec{i} + z^4 \log(x^4+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Sia $\mathcal{S}$ la superficie chiusa che è frontiera del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ e sia $\vec{n}$ il versore normale uscente da $\mathcal{S}$. Allora $\displaystyle\iint_\mathcal{S} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: 2 $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{3}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha-4} e^{-n^2\sqrt{x}}, \quad x \in [0, +\infty), \quad n \ge 1.$$

   Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

   (a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $I = [0, +\infty)$ (b) per $\alpha \le 4$ si ha $I = [0, +\infty)$ e per $\alpha > 4$ si ha $I = (0, +\infty)$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in I per $\alpha < 4$ e non converge uniformemente in I per $\alpha \ge 4$ (e) f_n converge uniformemente in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ per $\alpha \ge 4$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$ per $\alpha < 4$

   tutte e sole quelle corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha}\right) - \cos\left(\dfrac{e^x}{n^\alpha}\right)\right)^6}{\log(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il suo insieme di convergenza puntuale.

   (b) Per $\alpha > \frac{1}{12}$ stabilire se la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{12x}}{n^{12\alpha} \log(n)}$$

   converge totalmente in $\mathbb{R}$ o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 16}{t^2 + 1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e di unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.

(c) Nel caso $y_0 = 0$ studiare l'eventuale simmetria della soluzione e studiarne la concavità e convessità.

(d) Nel caso $y_0 < 4$ stabilire se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome... Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha y^2} - \cos(5y) + \sin(x^2)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{25}{2}$ (b) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (d) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{25}{2}$ (e) per $\alpha = \frac{25}{2}$ si ha $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{25}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = 4y + \frac{x^2}{4y} - 4\log x$. Dopo aver determinato i punti stazionari di f in A, allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 4, \frac{1}{2})$ che risultano essere entrambi punti di

minimo relativo $\boxed{B}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (4, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di minimo relativo $\boxed{C}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (4, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{D}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (4, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di sella $\boxed{E}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 4, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{F}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 4, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella

---

3. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0,\pi]$. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma$ vale

Risp.: $\boxed{A}$: $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ $\boxed{B}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{C}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{D}$: $-2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ $\boxed{E}$: $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ $\boxed{F}$: $-\sqrt{6}$

---

4. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = 5z \arctan y^2\,\vec{i} + z^5 \log(x^4+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Sia $\mathcal{S}$ la superficie chiusa che è frontiera del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ e sia $\vec{n}$ il versore normale uscente da $\mathcal{S}$. Allora $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ vale

Risp.: $\boxed{A}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{B}$: π $\boxed{C}$: 1 $\boxed{D}$: 2 $\boxed{E}$: 2π $\boxed{F}$: $\frac{\pi}{3}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha-5} e^{-n^2\sqrt{x}}, \quad x \in [0,+\infty), \quad n \ge 1.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $I = [0,+\infty)$ (b) per $\alpha \le 5$ si ha $I = [0,+\infty)$ e per $\alpha > 5$ si ha $I = (0,+\infty)$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in I per $\alpha < 5$ e non converge uniformemente in I per $\alpha \ge 5$ (e) f_n converge uniformemente in $[A,+\infty)$ per ogni $A > 0$ per $\alpha \ge 5$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ per $\alpha < 5$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{B}$: (b), (c), (d) $\boxed{C}$: (a), (d), (f) $\boxed{D}$: (b), (d), $\boxed{E}$: (a), (e) $\boxed{F}$: (b), (d), (e), (f)

---

6. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha}\right) - \cos\left(\dfrac{e^x}{n^\alpha}\right)\right)^8}{\log(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Per $\alpha > \frac{1}{16}$ stabilire se la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{16x}}{n^{16\alpha}\log(n)}$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$ o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 25}{t^2 + 1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e di unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.

(c) Nel caso $y_0 = 0$ studiare l'eventuale simmetria della soluzione e studiarne la concavità e convessità.

(d) Nel caso $y_0 < 5$ stabilire se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = $-0,5$; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha y^2} - \cos(6y) + \sin(x^2)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 18$ (b) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (d) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se e solo se $\alpha = 18$ (e) per $\alpha = 18$ si ha $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 18$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

---

2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = 5y + \frac{x^2}{4y} - 5\log x$. Dopo aver determinato i punti stazionari di f in A, allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 5, \frac{1}{2})$ che risultano essere entrambi punti di minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (5, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (5, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di sella $\boxed{\text{D}}$: f ha due punti stazionari $P_{\pm} = (\pm 5, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{\text{E}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (5, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di minimo relativo $\boxed{\text{F}}$: f ha due punti stazionari $P_{\pm} = (\pm 5, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella

---

3. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0,\pi]$. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\Gamma$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{D}}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ $\boxed{\text{F}}$: $-\sqrt{6}$

---

4. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = 6z\arctan y^2\,\vec{i} + z^6\log(x^4+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Sia $\mathcal{S}$ la superficie chiusa che è frontiera del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ e sia $\vec{n}$ il versore normale uscente da $\mathcal{S}$. Allora $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: 1 $\boxed{\text{D}}$: 2 $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{3}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha-6}e^{-n^2\sqrt{x}}, \quad x \in [0,+\infty), \quad n \ge 1.$$

   Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

   (a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $I = [0,+\infty)$ (b) per $\alpha \le 6$ si ha $I = [0,+\infty)$ e per $\alpha > 6$ si ha $I = (0,+\infty)$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in I per $\alpha < 6$ e non converge uniformemente in I per $\alpha \ge 6$ (e) f_n converge uniformemente in $[A,+\infty)$ per ogni $A > 0$ per $\alpha \ge 6$ (f) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ per $\alpha < 6$

   tutte e sole quelle corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha}\right) - \cos\left(\dfrac{e^x}{n^\alpha}\right)\right)^{10}}{\log(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il suo insieme di convergenza puntuale.

   (b) Per $\alpha > \frac{1}{20}$ stabilire se la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{20x}}{n^{20\alpha}\log(n)}$$

   converge totalmente in $\mathbb{R}$ o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 36}{t^2 + 1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e di unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.

(c) Nel caso $y_0 = 0$ studiare l'eventuale simmetria della soluzione e studiarne la concavità e convessità.

(d) Nel caso $y_0 < 6$ stabilire se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha y^2} - \cos(7y) + \sin(x^2)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{49}{2}$ (b) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (d) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{49}{2}$ (e) per $\alpha = \frac{49}{2}$ si ha $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = \frac{49}{2}$

   tutte e sole quelle corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = 6y + \frac{x^2}{4y} - 6\log x$. Dopo aver determinato i punti stazionari di f in A, allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 6, \frac{1}{2})$ che risultano essere entrambi punti di

minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (6, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di minimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (6, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{\text{D}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (6, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 6, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 6, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella

---

3. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0,\pi]$. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ $\boxed{\text{B}}$: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{D}}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ $\boxed{\text{F}}$: $-\sqrt{6}$

---

4. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = 7z\arctan y^2\,\vec{i} + z^7\log(x^4+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Sia $\mathcal{S}$ la superficie chiusa che è frontiera del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ e sia $\vec{n}$ il versore normale uscente da $\mathcal{S}$. Allora $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: 2 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{3}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha-7}e^{-n^2\sqrt{x}}, \quad x \in [0,+\infty), \quad n \ge 1.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $I = [0,+\infty)$ (b) per $\alpha \le 7$ si ha $I = [0,+\infty)$ e per $\alpha > 7$ si ha $I = (0,+\infty)$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in I per $\alpha < 7$ e non converge uniformemente in I per $\alpha \ge 7$ (e) f_n converge uniformemente in $[A,+\infty)$ per ogni $A > 0$ per $\alpha \ge 7$ (f) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ per $\alpha < 7$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha}\right) - \cos\left(\dfrac{e^x}{n^\alpha}\right)\right)^{12}}{\log(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Per $\alpha > \frac{1}{24}$ stabilire se la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{24x}}{n^{24\alpha}\log(n)}$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$ o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 49}{t^2 + 1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e di unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.

(c) Nel caso $y_0 = 0$ studiare l'eventuale simmetria della soluzione e studiarne la concavità e convessità.

(d) Nel caso $y_0 < 7$ stabilire se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra.

[**Punteggio: 5 punti**]