Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = xe^{-x^2} + y^2 - y$. Allora f ammette

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: un punto di massimo relativo ed un punto di sella $\boxed{\text{B}}$: un punto di massimo relativo ed un punto di minimo relativo $\boxed{\text{C}}$: un punto di minimo relativo ed un punto di sella $\boxed{\text{D}}$: due punti di sella $\boxed{\text{E}}$: due punti di minimo relativo

2. Data la curva Γ di rappresentazione parametrica
$$\vec{r}(t) = e^t \cos t\,\vec{i} + e^t \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k} \quad t \in [0, 2\pi],$$
   l'integrale $I = \int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right]$ $\boxed{\text{B}}$: $\left[\left(2e^{4\pi}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right]$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$ $\boxed{\text{D}}$: $-3^{\frac{3}{2}}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{6}\left[\left(2e^{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$

3. Sia S la superficie data dalla porzione di cilindro circolare di rappresentazione parametrica
$$\vec{r}(u,v) = 2\cos u\vec{i} + 2\sin u\vec{j} + v\vec{k} \quad (u,v) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,3].$$
   Allora $\iint_S 2x^2 e^z \, dS$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $8\pi(e^3-1)$ $\boxed{\text{C}}$: $2(e^3-1)$ $\boxed{\text{D}}$: $\pi(e^3-1)$ $\boxed{\text{E}}$: $8(e^3-1)$

4. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left((n+1)^7 \left(\frac{x}{2}\right)^n\right).$$

Delle seguenti affermazioni: (a) f_n converge puntualmente a $f(x) = 0$ in $\mathbb{R}$ (b) f_n converge puntualmente in $]-2, +\infty[$ alla funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| < 2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$ (c) converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (d) converge uniformemente solo sui sottointervalli del tipo $[-a, a]$ per qualsiasi $0 < a < 2$ e su $[2, +\infty[$ (e) in qualunque sottointervallo di $\mathbb{R}$ non converge uniformemente

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e)

---

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{6}{\pi}x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 3\sin x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni: (a) $a_0 = 3(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi})$, $a_1 = \frac{3}{\pi}(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi})$, $b_1 = 3(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4})$; (b) la serie di Fourier associata a f converge solo puntualmente in $\mathbb{R}$ a f; (c) la serie di Fourier associata a f converge uniformemente in $\mathbb{R}$ a f; (d) detta $S(x)$ la somma della serie di Fourier, si ha $S(\frac{\pi}{2}) = 3$; (e) detta $S(x)$ la somma della serie di Fourier, si ha $S(\frac{\pi}{2}) = 0$.

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a) (b) (e) $\boxed{\text{B}}$: (c) (d) $\boxed{\text{C}}$: (a) (c) (d) $\boxed{\text{D}}$: (b) (e) $\boxed{\text{E}}$: (a) (c) (e)

---

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} 7(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f è continua in $(0,0)$?

(b) f ammette le derivate direzionali in $(0,0)$? In caso affermativo, calcolarle.

(c) f è differenziabile in $(0,0)$?

(d) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y^2-4}{y^2+4} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie;

(c) studiare la monotonia della soluzione;

(d) calcolare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$;

(e) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]
