Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE il foglio A con TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,3)$. Data $f(x,y) = 4xye^{y+3x}$, detti $M = \max_T f$ e $m = \min_T f$, si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{3}{2}e^3$ e $M = 3e^3$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 0$ e $M = \frac{3}{2}e^3$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 0$ e $M = 3e^3$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 0$ e $M = 3e^{\frac{3}{2}}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$ e $M = 3e^3$

---

2. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} = F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = ye^x\,\vec{i} + (e^x - \cos y)\,\vec{j}.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) $\vec{F}$ è conservativo (b) $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = 49\pi$, dove Γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 7 percorsa una volta in senso antiorario (c) il campo scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da $\varphi(x,y) = ye^x - \sin y + 7$ è un potenziale per $\vec{F}$ (d) $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = 7\pi e$, dove Γ è l'arco di curva $y = 7\pi\sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ (e) $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = ye^x$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (e)

---

3. Il volume del solido S definito da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 \le 4\,, 0 \le z \le x + 2\}$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2π $\boxed{\text{B}}$: 2 $\boxed{\text{C}}$: π $\boxed{\text{D}}$: 4 $\boxed{\text{E}}$: 4π

---

4. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\ge1}$ definita da

$$f_n(x) = \arctan(n^{x-7})\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) l'insieme di convergenza puntuale I è $\mathbb{R}$ (b) l'insieme di convergenza puntuale I è $(-\infty, 7]$ (c) l'insieme di convergenza puntuale I è $[7, +\infty)$ (d) f_n converge uniformemente su I (e) f_n converge uniformemente su $(-\infty, a]$ con $a < 7$ (f) f_n converge uniformemente su $[b, +\infty)$ con $b > 7$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f)

---

5. La serie di funzioni

$$\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2 + 7n}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

   (*può essere utile ricordare che* $|\arctan t| \le |t|\,,\ \forall t \in \mathbb{R}$)

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente solo su $[-M, M]$ con $0 < M < 1$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: converge totalmente solo su $[0, M]$ con $0 < M < 1$

---

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+2xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) f è continua in $(0,0)$?

   (b) f ammette le derivate parziali in $(0,0)$?

   (d) f è differenziabile in $(0,0)$?

   [**Punteggio: 4 punti**]

---

7. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cosh\left(\frac{y}{2}\right) - 1 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare le soluzioni stazionarie.

   (c) Studiare la monotonia della soluzione. Discutere se l'intervallo massimale di esistenza può essere ilimitato a destra e/o a sinistra.

   (d) Studiare la concavità/convessità della soluzione, discutendo l'esistenza di eventuali punti di flesso.

   [**Punteggio: 6 punti**]
