Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizio 1: risposta esatta = +3; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0; esercizi 2-4: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE il foglio A con TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $\quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } -\pi < x \le 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x \le \pi \end{cases}$
e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie di Fourier di f converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie di Fourier di f converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (c) $S(3\pi) = \pi$ (d) $S(3\pi) = 2\pi$ (e) $S(2\pi) = \pi$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a d $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: a b d $\boxed{\text{D}}$: b c $\boxed{\text{E}}$: c e $\boxed{\text{F}}$: a b e

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 2$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 4$ (c) f ammette le derivate parziali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$ (d) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 2$ (e) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a e $\boxed{\text{B}}$: b e $\boxed{\text{C}}$: a c $\boxed{\text{D}}$: c e $\boxed{\text{E}}$: a d $\boxed{\text{F}}$: b c

---

3. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}$, $x \in [0, +\infty[$. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge puntualmente in $[0,7[$ (b) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente in $[0,7]$ (c) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente in $[0,7[$ (d) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente in $[0,b]$ per ogni $b \in]0,7[$ (e) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge puntualmente in $[0,7]$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b e $\boxed{\text{D}}$: c e $\boxed{\text{E}}$: a $\boxed{\text{F}}$: a d

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V 6z \, dxdydz$ dove V è il dominio definito da
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 4 $\boxed{\text{B}}$: -4 $\boxed{\text{C}}$: 4π $\boxed{\text{D}}$: π $\boxed{\text{E}}$: -2 $\boxed{\text{F}}$: 2π

---

5. Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale $\vec{F}$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = (\cos x + \log(y^3))\vec{i}_1 + \left(\beta \frac{x}{y} + \frac{e^y}{1+e^{2y}}\right)\vec{i}_2$$

è conservativo nel suo dominio. Per tale valore di β, determinare un potenziale di $\vec{F}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\gamma \in [0, +\infty[$. Si consideri la seguente serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^\gamma + 1} 3^{-n}$, $x \in \mathbb{R}$. Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\gamma \in [0, +\infty[$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2(x-1)^2(x - y^2) + 7$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = t \, \dfrac{4 - y^2(t)}{y(t)}, \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la monotonia e le eventuali simmetrie delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

. . . .

Risposta [5 punti]

---

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie di Fourier di f converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie di Fourier di f converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (c) $S(3\pi) = \pi$ (d) $S(3\pi) = 2\pi$ (e) $S(2\pi) = \pi$; le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a d $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: a b d $\boxed{\text{D}}$: b c $\boxed{\text{E}}$: c e $\boxed{\text{F}}$: a b e

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \sin(y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) f è continua in $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > 2$ (b) f è continua in $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > 4$ (c) f ammette le derivate parziali in $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > 3$ (d) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > 2$ (e) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ se e solo se $\alpha > 3$; le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a e $\boxed{\text{B}}$: b e $\boxed{\text{C}}$: a c $\boxed{\text{D}}$: c e $\boxed{\text{E}}$: a d $\boxed{\text{F}}$: b c

---

3. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}$, $x \in [0, +\infty[$. Delle seguenti affermazioni

   (a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge puntualmente in $[0, 7[$ (b) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente in $[0, 7]$ (c) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente in $[0, 7[$ (d) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente in $[0, b]$ per ogni $b \in]0, 7[$ (e) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge puntualmente in $[0, 7]$; le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b e $\boxed{\text{D}}$: c e $\boxed{\text{E}}$: a $\boxed{\text{F}}$: a d

---

4. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_V 6z\, dxdydz$ dove V è il dominio definito da

   $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$.

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 4 $\boxed{\text{B}}$: -4 $\boxed{\text{C}}$: 4π $\boxed{\text{D}}$: π $\boxed{\text{E}}$: -2 $\boxed{\text{F}}$: 2π

---

5. Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale $\vec{F}$ definito da

$$\vec{F}(x, y) = (\cos x + \log(y^3))\vec{i}_1 + \left(\beta \frac{x}{y} + \frac{e^y}{1 + e^{2y}}\right)\vec{i}_2$$

   è conservativo nel suo dominio. Per tale valore di β, determinare un potenziale di $\vec{F}$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Sia $\gamma \in [0,+\infty[$. Si consideri la seguente serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^\gamma+1} 3^{-n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$ Si calcoli il raggio di convergenza al variare di $\gamma \in [0,+\infty[$ e, nei casi in cui è finito, si studi la convergenza sul bordo.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 2(x-1)^2(x-y^2) + 7$$

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = t\,\dfrac{4-y^2(t)}{y(t)}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studi, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, la monotonia e le eventuali simmetrie delle soluzioni. Si studi il comportamento asintotico delle soluzioni agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

. . . .

Risposta [5 punti]
