Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{y^2} - 1 + 2\sin(x^2 y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 2$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 1$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 1$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (f)

2. Si consideri la funzione $g(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\,,\ 0 \leq y \leq x\}$. Detti $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = -\frac{3}{4}$ e $M = 0$ $\boxed{\text{B}}$: $m = -\frac{2}{3}$ e $M = 0$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 0$ e $M = \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 0$ e $M = \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{2}{3}$ e $M = \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{F}}$: $m = 0$ e $M = \frac{3}{8}$

---

3. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = [a\, e^y(2\cos x + 2\sin y) - 2xe^y \sin x]\,\vec{i} + [xe^y(2\cos x + 2\sin y) + b\, xe^y \cos y]\,\vec{j}$$

si determinino i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{F}$ sia conservativo. Per tali valori di a e b si calcoli l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma}$, dove Γ è il segmento che congiunge i punti $A = (0,0)$ e $B = (\pi, \pi)$, percorso da A verso B. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $a = 1, b = 2, I = -2\pi e^{\pi}$ $\boxed{\text{B}}$: $a = 2, b = 2, I = -2\pi e^{2\pi}$ $\boxed{\text{C}}$: $a = 1, b = 2, I = -2e^{\pi}$ $\boxed{\text{D}}$: $a = 1, b = 1, I = 2\pi e^{2\pi}$ $\boxed{\text{E}}$: $a = 1, b = 2, I = 2e^{\pi}$ $\boxed{\text{F}}$: $a = 2, b = 2, I = 2e^{2\pi}$

---

4. L'integrale $\displaystyle\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$ dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le z \le 7\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{2}{15} 7^{3/2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4}{5} 7^{5/2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$: $7^{3/2}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{15} 7^{5/2}\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{4}{15} 7^{5/2}\pi$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{15} 7^{3/2}\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = x\, e^{n(x^2-4)} + \left(\dfrac{x}{2}\right)^n$, $x \in [0, +\infty)$ $n \in \mathbb{Z}^+$. Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $[0,+\infty)$ (b) f_n converge puntualmente solo in $[0,2]$ (c) f_n converge uniformemente in $[0,+\infty)$ (d) f_n converge uniformemente in $[0,2)$ (e) f_n converge uniformemente in $[0,a]$ per ogni $0 < a < 2$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 f_n(x)\, dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a)

---

6. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 + \arctan\left(\frac{x\log n}{n^{\alpha-2}}\right)\right), \qquad x \in [0,+\infty)\,.$$

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = t\,\dfrac{y^2(y-7)}{y^2+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;
(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;
(c) determinare le eventuali simmetrie della soluzione;
(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]