Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE il foglio A con TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+7y^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ (b) f è discontinua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ non esiste (e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 2$, dove $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: (a), (d), (e) $\boxed{B}$: (b), (d) $\boxed{C}$: (a), (c), (d) $\boxed{D}$: (b), (e) $\boxed{E}$: (a), (c), (e)

---

2. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = (2y - x^2)^4(y + x + \alpha).$$

Al variare di α, il punto $(0,0)$

Risp.: $\boxed{A}$: è minimo locale per $\alpha \neq 0$ e sella per $\alpha = 0$ $\boxed{B}$: è massimo locale per $\alpha \neq 0$ e sella per $\alpha = 0$ $\boxed{C}$: è massimo locale per $\alpha < 0$, minimo locale per $\alpha > 0$ e sella per $\alpha = 0$ $\boxed{D}$: è minimo locale per $\alpha < 0$, massimo locale per $\alpha > 0$ e sella per $\alpha = 0$ $\boxed{E}$: non è mai stazionario

---

3. L'area della superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = xy, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 3\}$$

vale

Risp.: $\boxed{A}$: $\frac{\pi}{9}[4^{\frac{3}{2}} - 1]$ $\boxed{B}$: $\frac{3^4}{32}(2 + \sqrt{3})$ $\boxed{C}$: $\frac{3}{2}$ $\boxed{D}$: $\pi[4^{\frac{3}{2}} - 1]$ $\boxed{E}$: $3^4(2 + \sqrt{3})$

---

4. L'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ dove

$$\vec{F}(x,y) = \left(\ln(x + 2y) + \frac{x}{x + 2y}\right)\vec{i} + \frac{2x}{x + 2y}\vec{j}$$

e Γ è l'arco di curva $y = x^3$ con $x \in [1,2]$ vale

Risp.: $\boxed{A}$: $\ln 18 + \ln 3$ $\boxed{B}$: 0 $\boxed{C}$: $\ln 18$ $\boxed{D}$: $2\ln 18 - \ln 3$ $\boxed{E}$: $\ln 3 - 2\ln 18$

---

5. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha-1}e^{-(x-n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in \mathbb{R}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) l'insieme di convergenza puntuale è $\mathbb{R}$ per ogni α (b) l'insieme di convergenza puntuale è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per ogni α (c) converge uniformemente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 1$ (d) converge uniformemente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 1$ (e) converge uniformemente su $]-\infty, a]$ con $a \in \mathbb{R}$ per ogni α

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e)

---

6. Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(n!)^{\alpha-1}(2n+2)}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcolare il raggio di convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Per $\alpha = 1$ calcolare la somma della serie.

   [**Punteggio: 4 punti**]

---

7. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \ln\left(y^2 + \frac{1}{2}\right) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare le soluzioni stazionarie.

   (c) Studiare la monotonia della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

   (d) Studiare i limiti di y per $t \to +\infty$ and $t \to -\infty$ al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

   (e) Studiare la concavità della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

   [**Punteggio: 6 punti**]
