Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizio 1: risposta esatta = +3; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0; esercizi 2-4: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE il foglio A con TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Determinare per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\vec{i} + (\frac{1}{2}x^2 + \beta\frac{e^y}{z})\,\vec{j} + (3\frac{e^y}{z^2} - x\cos z)\vec{k}$$

è conservativo in $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z > 0\}$. Per tale valore di β sia $\varphi(x,y,z)$ un suo potenziale. Calcolare $\varphi(3,0,2\pi) - \varphi(3,0,\pi)$.

Risp.: $\boxed{A}$: $\frac{3}{\pi}$ $\boxed{B}$: $\frac{3}{2\pi}$ $\boxed{C}$: $-\frac{3}{\pi}$ $\boxed{D}$: π $\boxed{E}$: -2π $\boxed{F}$: -3π

---

2. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica S definita da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\; x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\,,\; z \geq 0\}.$$

Risp.: $\boxed{A}$: $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $\boxed{B}$: $\pi\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $\boxed{C}$: $\pi\left(\pi + \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{D}$: $1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\boxed{E}$: $2\pi + \frac{1}{2}$ $\boxed{F}$: $2 - \frac{\pi}{2}$

---

3. Si consideri la funzione $g(x,y) = x + y$ definita sul dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-2)^2 \leq y \leq 2 - x\}$. Siano m il minimo e M il massimo di g su T.

Delle seguenti affermazioni

(a) $m = \frac{7}{4}$ (b) g ammette infiniti punti di minimo (c) g ammette infiniti punti di massimo (d) $M = 3$ (e) $M = 2$ (f) $m = 2$;

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: a c d $\boxed{B}$: a b c $\boxed{C}$: b c e $\boxed{D}$: c d f $\boxed{E}$: b d f $\boxed{F}$: a c e

---

4. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \geq 3/2$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3/2$ (c) f ammette le derivate parziali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \geq 2$ (d) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 2$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 2$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a c $\boxed{\text{B}}$: a d e $\boxed{\text{C}}$: b d e $\boxed{\text{D}}$: b d $\boxed{\text{E}}$: a d $\boxed{\text{F}}$: b c

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\geq 2}$ così definita:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{n^2}, \quad x \geq -7.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(\sqrt{x}-1)^n$, $x \geq 0$, determinare l'insieme A di convergenza puntuale. Calcolare la somma della serie in A (suggerimento: porre $\frac{\sqrt{x}-1}{2} = t \ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}, \\ y(0) = y_0 \,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la monotonia e la concavità delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione dell'equazione $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$ tale che $y(0) = \sqrt{2}$. Confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente: in particolare, determinare l'intervallo massimale di esistenza e gli eventuali asintoti.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Determinare per quale valore del parametro reale β il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\vec{i} + (\frac{1}{2}x^2 + \beta\frac{e^y}{z})\,\vec{j} + (3\frac{e^y}{z^2} - x\cos z)\vec{k}$$

è conservativo in $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > 0\}$. Per tale valore di β sia $\varphi(x,y,z)$ un suo potenziale. Calcolare $\varphi(3,0,2\pi) - \varphi(3,0,\pi)$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{\pi}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{3}{2\pi}$ $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{3}{\pi}$ $\boxed{\text{D}}$: π $\boxed{\text{E}}$: -2π $\boxed{\text{F}}$: -3π

---

2. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica S definita da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}\,,\ z \ge 0\}.$$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $\boxed{\text{B}}$: $\pi\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ $\boxed{\text{C}}$: $\pi\left(\pi + \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{D}}$: $1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\boxed{\text{E}}$: $2\pi + \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{F}}$: $2 - \frac{\pi}{2}$

---

3. Si consideri la funzione $g(x,y) = x + y$ definita sul dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2 \le y \le 2 - x\}$. Siano m il minimo e M il massimo di g su T.

Delle seguenti affermazioni

(a) $m = \frac{7}{4}$ (b) g ammette infiniti punti di minimo (c) g ammette infiniti punti di massimo (d) $M = 3$ (e) $M = 2$ (f) $m = 2$;

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a c d $\boxed{\text{B}}$: a b c $\boxed{\text{C}}$: b c e $\boxed{\text{D}}$: c d f $\boxed{\text{E}}$: b d f $\boxed{\text{F}}$: a c e

---

4. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \ge 3/2$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3/2$ (c) f ammette le derivate parziali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \ge 2$ (d) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 2$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 2$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a c $\boxed{\text{B}}$: a d e $\boxed{\text{C}}$: b d e $\boxed{\text{D}}$: b d $\boxed{\text{E}}$: a d $\boxed{\text{F}}$: b c

---

5. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\ge 2}$ così definita:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{n^2}, \quad x \ge -7.$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

6. Data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(\sqrt{x}-1)^n, \quad x \geq 0\,,$ determinare l'insieme A di convergenza puntuale. Calcolare la somma della serie in A (suggerimento: porre $\frac{\sqrt{x}-1}{2} = t \ldots$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la monotonia e la concavità delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

8. Determinare la soluzione dell'equazione $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+2}}{y}$ tale che $y(0) = \sqrt{2}$. Confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente: in particolare, determinare l'intervallo massimale di esistenza e gli eventuali asintoti.

. . . .

Risposta [4 punti]:
