Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} - \cos(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua su $\mathbb{R}^2$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) $\nexists\, \nabla f(0,0)$ (d) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (e) esistono solo le derivate parziali in $(0,0)$, mentre tutte le altre derivate direzionali non esistono (f) f è differenziabile

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 3 \leq x+y \leq 6\,, \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x\}$. Sia $g(x,y) = xy + 1$, e siano $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $M = 3$ e $m = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $M = 10$ e $m = 1$ $\boxed{\text{C}}$: $M = 10$ e $m = 3$ $\boxed{\text{D}}$: $M = 4$ e

$m=-2$ $\boxed{\text{E}}$: $M=18$ e $m=3$ $\boxed{\text{F}}$: $M=3$ e $m=2$

---

3. L'integrale curvilineo di prima specie $\int_\Gamma 21y\,ds$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t)=t^2\,\vec{i}+2t\,\vec{j}+2\,\vec{k}$ con $t\in[0,1]$, vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $28(2^{3/2}-1)$ $\boxed{\text{B}}$: $2^{3/2}-1$ $\boxed{\text{C}}$: $7(2^{3/2}-1)$ $\boxed{\text{D}}$: $7\cdot 2^{3/2}$ $\boxed{\text{E}}$: $2^{3/2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{4}{3}(2^{3/2}-1)$

---

4. L'integrale di superficie

$$2\iint_S \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS$$

   dove S è la superficie data in forma parametrica $\vec{r}(u,v)=u\,\vec{i}+v\vec{j}+(u^2+v^2)\vec{k}$ con $(u,v)\in D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ u^2+v^2\le 4\}$, vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2π $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: 8 $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: $-\pi$ $\boxed{\text{F}}$: 8π

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{e^{nx}}{2n+e^{nx}}\,,\quad x\in\mathbb{R}\quad n\in\mathbb{Z}^+.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) f_n non converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (c) f_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in $(-\infty,0]$ (e) f_n converge uniformemente in $(0,+\infty)$ (f) f_n converge uniformemente in $[a,+\infty)$ per ogni $a>0$

   tutte e sole quelle corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

---

6. Studiare al variare di $\beta\ge 0$ la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(2^n\sin\left(\frac{1}{n^7}\right)\right)^{\beta}t^{3n}.$$

   Per $\beta=0$, calcolare la somma $S(t)$ della serie.

   [**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=t^2\arctan(y^2-49)\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$

   Al variare di $y_0\in\mathbb{R}$:

   (a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) discutere eventuali simmetrie della soluzione nel caso $y_0 = 0$;

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]