Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = $-0,5$; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x^2} - \cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è differenziabile in $(0,0)$ (e) tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle (f) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d), (f)

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 4xy + y^2$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha \neq 4$, $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f ha infiniti punti stazionari (c) per $\alpha = 4$, tutti i punti della retta $y = -2x$ sono di minimo assoluto (d) per $\alpha < 4$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (e) per $\alpha > 4$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto (f) per $\alpha > 4$, $(0,0)$ è punto di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\, d\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, -x)$ e Γ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: π $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{3}{4}\pi$

---

4. L'integrale

$$\iint_T \left(2\sin(x)e^y + \frac{9}{13}x^2\right) dxdy$$

con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|, \ -1 \leq x \leq 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{3}{20}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{5}$ $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{3}{10}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{10}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{2}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{3}{x}\right)^n\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0, +\infty)$ (b) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (c) f_n converge uniformemente in $(0, +\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $(0, +\infty) \setminus \{3\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(0, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $0 < a < 3$ e ogni $b > 3$ (f) $\lim_{n \to +\infty} \int_1^2 f_n(x)dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^2+3)}}\right) \frac{n^{1-\alpha}}{\exp\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(2 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) per $y_0 = 0$, determinare eventuali simmetrie della soluzione

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x^2}-\cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è differenziabile in $(0,0)$ (e) tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle (f) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e), (f)

2. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\alpha x^2+6xy+y^2$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha \neq 9$, $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f ha infiniti punti stazionari (c) per $\alpha = 9$, tutti i punti della retta $y = -3x$ sono di minimo assoluto (d) per $\alpha < 9$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (e) per $\alpha > 9$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto (f) per $\alpha > 9$, $(0,0)$ è punto di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, -x)$ e Γ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{3}{4}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{3}{16}\pi$

---

4. L'integrale

$$\iint_T \left(4\sin(x)e^y + \frac{15}{13}x^2\right) dxdy$$

con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|,\ -1 \leq x \leq 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 1 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{7}{10}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{5}{x}\right)^n\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0, +\infty)$ (b) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (c) f_n converge uniformemente in $(0, +\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $(0, +\infty) \setminus \{5\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(0, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $0 < a < 5$ e ogni $b > 5$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 f_n(x)dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d), (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^3+4)}}\right) \frac{n^{2-\alpha}}{\exp\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(3 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) per $y_0 = 0$, determinare eventuali simmetrie della soluzione

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{4x^2} - \cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è differenziabile in $(0,0)$ (e) tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle (f) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 8xy + y^2$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha \neq 16$, $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f ha infiniti punti stazionari (c) per $\alpha = 16$, tutti i punti della retta $y = -4x$ sono di minimo assoluto (d) per $\alpha < 16$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (e) per $\alpha > 16$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto (f) per $\alpha > 16$, $(0,0)$ è punto di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (e)

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, -x)$ e Γ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{3}{4}\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}$

---

4. L'integrale

$$\iint_T \left(6\sin(x)e^y + \frac{21}{13}x^2\right) dxdy$$

con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|, \ -1 \leq x \leq 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{9}{10}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{7}{5}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{7}{20}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{7}{10}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{7}{10}$ $\boxed{\text{F}}$: 0

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{7}{x}\right)^n\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0, +\infty)$ (b) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (c) f_n converge uniformemente in $(0, +\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $(0, +\infty) \setminus \{7\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(0, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $0 < a < 7$ e ogni $b > 7$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^4 f_n(x)dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^4+5)}}\right) \frac{n^{3-\alpha}}{\exp\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(4 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) per $y_0 = 0$, determinare eventuali simmetrie della soluzione

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome... Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{5x^2}-\cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è differenziabile in $(0,0)$ (e) tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle (f) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (f)

2. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\alpha x^2+10xy+y^2$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha \neq 25$, $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f ha infiniti punti stazionari (c) per $\alpha = 25$, tutti i punti della retta $y = -5x$ sono di minimo assoluto (d) per $\alpha < 25$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (e) per $\alpha > 25$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto (f) per $\alpha > 25$, $(0,0)$ è punto di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, -x)$ e Γ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: π $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{3}{4}\pi$

---

4. L'integrale

$$\iint_T \left(8\sin(x)e^y + \frac{27}{13}x^2\right) dxdy$$

con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,: x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|,\ -1 \leq x \leq 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{9}{10}$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{9}{20}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{9}{5}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{9}{10}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{11}{10}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{9}{x}\right)^n\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0, +\infty)$ (b) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (c) f_n converge uniformemente in $(0, +\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $(0, +\infty) \setminus \{9\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(0, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $0 < a < 9$ e ogni $b > 9$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 f_n(x)dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^5+6)}}\right) \frac{n^{4-\alpha}}{\exp\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(5 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) per $y_0 = 0$, determinare eventuali simmetrie della soluzione

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = $-0,5$; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{6x^2} - \cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è differenziabile in $(0,0)$ (e) tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle (f) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e), (f)

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 12xy + y^2$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha \neq 36$, $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f ha infiniti punti stazionari (c) per $\alpha = 36$, tutti i punti della retta $y = -6x$ sono di minimo assoluto (d) per $\alpha < 36$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (e) per $\alpha > 36$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto (f) per $\alpha > 36$, $(0,0)$ è punto di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (e)

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x, y) = (y, -x)$ e Γ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $-\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{C}}$: π $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{3}{4}\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{3}{16}\pi$

---

4. L'integrale

$$\iint_T \left(10\sin(x)e^y + \frac{33}{13}x^2\right) dxdy$$

con $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|,\ -1 \leq x \leq 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{11}{10}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{11}{5}$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{11}{20}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{11}{10}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{13}{10}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{11}{x}\right)^n\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0, +\infty)$ (b) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (c) f_n converge uniformemente in $(0, +\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $(0, +\infty) \setminus \{11\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(0, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $0 < a < 11$ e ogni $b > 11$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^6 f_n(x)dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d), (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^6 + 7)}}\right) \frac{n^{5-\alpha}}{\exp\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(6 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) per $y_0 = 0$, determinare eventuali simmetrie della soluzione

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = $-0,5$; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{7x^2} - \cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è differenziabile in $(0,0)$ (e) tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle (f) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 14xy + y^2$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha \neq 49$, $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f ha infiniti punti stazionari (c) per $\alpha = 49$, tutti i punti della retta $y = -7x$ sono di minimo assoluto (d) per $\alpha < 49$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (e) per $\alpha > 49$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto (f) per $\alpha > 49$, $(0,0)$ è punto di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, -x)$ e Γ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{3}{4}\pi$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}$

---

4. L'integrale

$$\iint_T \left(12\sin(x)e^y + 3x^2\right) dxdy$$

con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|,\ -1 \leq x \leq 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{13}{5}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{13}{10}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{13}{20}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{13}{10}$ $\boxed{\text{F}}$: 0

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{13}{x}\right)^n\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0, +\infty)$ (b) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (c) f_n converge uniformemente in $(0, +\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $(0, +\infty) \setminus \{13\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(0, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $0 < a < 13$ e ogni $b > 13$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^7 f_n(x)dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^7+8)}}\right) \frac{n^{6-\alpha}}{\exp\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza puntuale.

(b) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il suo insieme di convergenza totale.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(7 + e^{-y^2}) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare eventuali soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) per $y_0 = 0$, determinare eventuali simmetrie della soluzione

(d) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]