Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{\cos(2x^2)-1} - 1 - \log(1+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua su $\mathbb{R}^2$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ (d) $\nexists \nabla f(0,0)$ (e) f non è differenziabile in $(0,0)$ (f) esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(0,0,0)$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d), (e)

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + \arctan(xy^2)$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(0,\pm1)$ sono punti di sella, $(2,0)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{B}}$: $(0,\pm1)$ sono punti di minimo, $(2,0)$ è di sella $\boxed{\text{C}}$: $(0,\pm1)$ sono punti di sella, $(2,0)$ è di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$: $(0,1)$

è di massimo relativo, $(0,-1)$ è di minimo relativo, $(2,0)$ è di sella $\boxed{\text{E}}$: $(0,\pm 1)$, $(2,0)$ sono punti di sella $\boxed{\text{F}}$: $(0,\pm 1)$ sono punti di massimo relativo, $(2,0)$ è di minimo relativo

---

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$\vec{F}(x,y) = (e^x(\cos x - \sin x) + e^x \sin y + \cos y)\ \vec{i} + (e^x \cos y - x \sin y + y)\ \vec{j}\,;$$

delle seguenti affermazioni

(a) $\overrightarrow{F}$ è conservativo, (b) $\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (c) $\oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = 1$ essendo Γ la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2, percorsa una volta in senso antiorario (d) Il campo scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da $\varphi(x,y) = e^x \cos x + e^x \sin y + x \cos y + 2$ è un potenziale per $\overrightarrow{F}$ (e) $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma = \frac{\pi^2}{2}$ dove Γ è il segmento congiungente $(0,0)$ e $(0,\pi)$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (e) $\boxed{\text{F}}$: (c), (e)

---

4. L'integrale

$$\frac{1}{4}\iint_T [2xy - y^2]\, dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2π $\boxed{\text{B}}$: -4π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: 4π $\boxed{\text{E}}$: $-\pi$ $\boxed{\text{F}}$: -1

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2n\, x^n}{n + x^n}\,, \quad x \in [0,1] \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente su $[0,1]$ (b) f_n non converge puntualmente su $[0,1]$ (c) f_n converge uniformemente su $[0,1]$ (d) f_n non converge uniformemente in $[0,1)$ (e) f_n converge uniformemente in $[0,a]$ per ogni $0 < a < 1$ (f) il limite puntuale in $[0,1)$ è una funzione di classe C^1.

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (e)

---

6. Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e la serie di funzioni $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)$ $\quad x \in [0,+\infty[$, dove

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{x \exp(-nx^2)}{(\log n)^{2\beta}}\,.$$

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale e totale della serie.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^3 \frac{y^2-1}{e^{y^2}} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) stabilire eventuali simmetrie della soluzione;

(d) stabilire l'esistenza di eventuali punti di massimo/minimo della soluzione;

(e) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

[**Punteggio: 5 punti**]