Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + xy + \alpha y^2 .$$

Delle seguenti affermazioni

(a) se $\alpha > \frac{1}{6}$, $(0,0)$ è punto di minimo relativo (b) se $\alpha < \frac{1}{6}$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (c) se $\alpha < \frac{1}{6}$, $(0,0)$ è punto di sella (d) se $\alpha = \frac{1}{6}$, f ammette infiniti punti di minimo relativo (e) se $\alpha = \frac{1}{6}$, f ammette infiniti punti di sella

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e)

2. Sia dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (e^x \sin y + 7y)\,\overrightarrow{i} + (e^x \cos y + 7x - 2y)\,\overrightarrow{j} .$$

Allora l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è l'arco di ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$ percorsa in senso antiorario, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sin 2 - 2$ $\boxed{\text{B}}$: $-\sin 2 - 4$ $\boxed{\text{C}}$: $\sin 2 - 4$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: $-\sin 2 + 2$

3. Sia S la superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i_1} + u\sin v\vec{i_2} + u^2\vec{i_3}$ con $(u,v) \in T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le \sqrt{2}\,, 0 \le v \le 2\pi\}$. Allora l'area di S vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{6}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{4}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{3}\left(9^{\frac{1}{2}} - 1\right)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{9^{\frac{3}{2}}}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{9^{\frac{1}{2}}}{4}$

---

4. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^3 x}{n^3 x^2 + n^2 \log n}, \qquad x \in \mathbb{R}, n \ge 2.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n\}$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ (c) il limite puntuale f è continuo nel suo dominio (d) $\{f_n\}$ converge uniformemente su $[2, +\infty[$ (e) $\{f_n\}$ **non** converge uniformemente su $[-1, 1]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (e)

---

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = \frac{|x|}{4}$ e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni

(a) $b_n = 0$ per ogni $n \ge 1$ (b) $a_0 = \frac{\pi}{4}$ (c) $a_1 = -\frac{1}{2}$ (d) la serie di Fourier converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$ (e) $S(2\pi) = 2$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d)

---

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x+2)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

(a) Stabilire se esistono le derivate direzionali di f in $(0,0)$ e, in caso affermativo, calcolarle.
(b) Verificare se vale l'uguaglianza $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$, per ogni $\vec{v}$ versore di $\mathbb{R}^2$.
(c) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
(d) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (1 - 2\sin y)^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$. Al variare di $y_0 \in [\frac{\pi}{6}, \frac{13}{6}\pi]$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;
(b) determinare le soluzioni stazionarie;
(c) studiare la monotonia della soluzione;
(d) calcolare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione;
(e) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]
