Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per gli esercizi 1-5; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI. Esercizi 1-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E

1. Siano T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(-3,0)$ e $(-3,3)$ e $f(x,y) = y - x^2$. Detti m e M il minimo ed il massimo di f su T si ha

   Risp.: $\boxed{A}$: $m = 0$ e $M = 1/4$ $\boxed{B}$: $m = -9$ e $M = -6$ $\boxed{C}$: $m = -9$ e $M = 1/4$ $\boxed{D}$: $m = -6$ e $M = 0$ $\boxed{E}$: $m = -9$ e $M = 0$

2. Sia dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = (ax\sin(\pi y) + y^2)\,\vec{i} + (x^2\cos(\pi y)) + bxy)\,\vec{j}$$

   dove $a, b \in \mathbb{R}$. Determinare a, b in modo che $\vec{F}$ risulti conservativo ed in tal caso calcolare $I = \int_\Gamma \vec{F}\,d\vec{r}$ dove Γ è una curva regolare da $(1,0)$ a $(1,1)$.

   Risp.: $\boxed{A}$: $a = 2$, $b = \frac{2}{\pi}$ e $I = 1$ $\boxed{B}$: $a = 2$, $b = 2$ e $I = 1$ $\boxed{C}$: $a = \frac{2}{\pi}$, $b = 2$ e $I = 0$ $\boxed{D}$: $a = 2$, $b = 2$ e $I = 0$ $\boxed{E}$: $a = \frac{2}{\pi}$, $b = 2$ e $I = 1$

3. L'integrale doppio $\iint_T 5x(x^2 + y^2)\,dxdy$ dove $T = T_1 \cup T_2$ con

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -x^2 - 4 \le y \le 0, -2 \le x \le 2\}, \quad T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0, x^2 + y^2 \le 2\}$$

   vale

   Risp.: $\boxed{A}$: $2^{5/2}$ $\boxed{B}$: $3 \cdot 2^{5/2}$ $\boxed{C}$: 0 $\boxed{D}$: $-2^{5/2}$ $\boxed{E}$: 2^5

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ (b) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (c) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ (d) f è differenziabile in $(0,0)$ (e) f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

quelle corrette sono tutte e sole

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c)

---

5. Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}} \arctan\left(\frac{x}{n^{2\alpha}\ln(n^2+1)}\right), \qquad x \geq 0$$

dove $\alpha > 0$. Delle seguenti affermazioni

(a) converge puntualmente in $[0,+\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{3}$ (b) converge puntualmente in $[0,+\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{5}$ (c) converge totalmente sugli intervalli del tipo $[0,M]$, $M > 0$, se e solo se $\alpha > \frac{1}{5}$ (d) converge totalmente in $[0,+\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{5}$ (e) converge totalmente in $[0,+\infty[$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{3}$

quelle corrette sono tutte e sole

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e)

---

6. Sia data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = n^\beta e^{n(x-2)}$ con $\beta \leq 0$. Siano I il suo insieme di convergenza puntuale e $f : I \to \mathbb{R}$ il suo limite puntuale.

(a) Determinare I e f al variare di $\beta \leq 0$.
(b) Nel caso $\beta < 0$, discutere la convergenza uniforme su I.
(c) Per $\beta = 0$, discutere la convergenza uniforme su I e sulle semirette $]-\infty, M]$ con $M < 2$.
(d) Nel caso $\beta = 0$, discutere il passaggio al limite sotto il segno di integrale su $[1,2]$.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 3y + 2) + \arctan(y^2 - 3y + 2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale della soluzione;
(b) determinare le soluzioni stazionarie;
(c) studiare la monotonia della soluzione;
(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

Stabilire infine se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra per $y_0 \geq 1$.

[**Punteggio: 5 punti**]
