Cognome e Nome... Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 2\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{3}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{3}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq \frac{1}{3}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{3}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{3}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

2. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 1$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 2$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 2$ e $M = 10$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 10$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 3$ e $M = 10$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 2$ e $M = 3$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 3$

3. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{2}{3}x + 4z\right)\,\mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + \dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\mathrm{A}}$: $3^{3/2} - 1$ $\boxed{\mathrm{B}}$: $2(3^{1/2} - 1)$ $\boxed{\mathrm{C}}$: $3^{1/2} - 1$ $\boxed{\mathrm{D}}$: $2(3^{3/2} - 1)$ $\boxed{\mathrm{E}}$: $3(3^{3/2} - 1)$ $\boxed{\mathrm{F}}$: $3(3^{1/2} - 1)$

---

4. L'integrale triplo $\displaystyle\iiint_E \exp\left((x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right)\,dxdydz$, dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, vale

Risp.: $\boxed{\mathrm{A}}$: $\frac{4\pi}{3}(e-2)$ $\boxed{\mathrm{B}}$: $\frac{4\pi}{3}(e-1)$ $\boxed{\mathrm{C}}$: $\frac{\pi}{3}(e-1)$ $\boxed{\mathrm{D}}$: $\frac{\pi}{2}(e-1)$ $\boxed{\mathrm{E}}$: $\frac{3\pi}{2}(e-2)$ $\boxed{\mathrm{F}}$: $\frac{\pi}{2}(e-2)$

---

5. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$f_n(x) = 2xe^{(x^2-1)n} + x^{2n+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni
(a) $I = [-1,1]$ (b) $I =]-1,1]$ (c) f_n converge uniformemente in I (d) f_n converge uniformemente in $]-1,1[$ (e) f_n converge uniformemente in $[-A,A]$ per ogni $0 < A < 1$ (f) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$
tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\mathrm{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\mathrm{B}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\mathrm{C}}$: (b), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\mathrm{D}}$: (b), (f) $\boxed{\mathrm{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\mathrm{F}}$: (b), (d), (e)

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\exp\left(\left(\frac{x}{7}\right)^n\right) - 1}{(n+\sin(7n!))\log(n^3)}, \qquad x \ge 0\,,$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;
(b) stabilire se la serie converge totalmente in I o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2+1) - 7 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*può essere utile osservare che* $\log(x^2+1) \le |x|$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$);
(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione all'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 3\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{5}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{5}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \le \frac{1}{5}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{5}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{5}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e), (f)

2. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 2$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 3$ e $M = 11$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 4$ e $M = 11$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{8}{3}$ e $M = 11$ $\boxed{\text{D}}$: $m = \frac{8}{3}$ e $M = 4$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 3$ e $M = 4$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{8}{3}$ e $M = 3$

3. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{1}{3}x + 4z\right)\, \mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 6t\,\vec{i} + \dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3(6^{3/2} - 8)$ $\boxed{\text{B}}$: $3(6^{1/2} - 2)$ $\boxed{\text{C}}$: $6^{3/2} - 8$ $\boxed{\text{D}}$: $2(6^{1/2} - 2)$ $\boxed{\text{E}}$: $6^{1/2} - 2$ $\boxed{\text{F}}$: $2(6^{3/2} - 8)$

---

4. L'integrale triplo $\displaystyle\iiint_E \exp\left((x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right)\, dxdydz$, dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{3}(e^8 - 2)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^8 - 1)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3\pi}{2}(e^4 - 3)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^4 - 3)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{2}(e^8 - 3)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$

---

5. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$f_n(x) = 2xe^{(x^2-4)n} + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

(a) $I = [-2,2]$ (b) $I =]-2,2]$ (c) f_n converge uniformemente in I (d) f_n converge uniformemente in $]-2,2[$ (e) f_n converge uniformemente in $[-A,A]$ per ogni $0 < A < 2$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\exp\left(\left(\frac{x}{6}\right)^n\right) - 1}{(n + \sin(6n!))\log(n^6)}, \qquad x \ge 0\,,$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la serie converge totalmente in I o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2+1) - 6 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*può essere utile osservare che* $\log(x^2+1) \le |x|$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$);

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione all'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 4\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{7\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{7}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{7}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq \frac{1}{7}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{7}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{7}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d)

2. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 3$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{11}{3}$ e $M = 4$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 5$ e $M = 12$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{11}{3}$ e $M = 5$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 4$ e $M = 12$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 4$ e $M = 5$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{11}{3}$ e $M = 12$

3. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{2}{9}x + 4z\right)\,\mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 9t\,\vec{i} + \dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2(11^{3/2}-27)$ $\boxed{\text{B}}$: $2(11^{1/2}-3)$ $\boxed{\text{C}}$: $3(11^{1/2}-3)$ $\boxed{\text{D}}$: $11^{3/2}-27$ $\boxed{\text{E}}$: $3(11^{3/2}-27)$ $\boxed{\text{F}}$: $11^{1/2}-3$

---

4. L'integrale triplo $\displaystyle\iiint_E \exp\left((x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right)\,dxdydz\,,$ dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}(e^9-1)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{3}(e^{27}-3)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3\pi}{2}(e^9-4)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{2}(e^{27}-4)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^{27}-1)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^9-4)$

---

5. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$f_n(x) = 2xe^{(x^2-9)n} + \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

(a) $I = [-3,3]$ (b) $I =]-3,3]$ (c) f_n converge uniformemente in I (d) f_n converge uniformemente in $]-3,3[$ (e) f_n converge uniformemente in $[-A,A]$ per ogni $0 < A < 3$ (f) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^3 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (d), (e), (f)

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\exp\left(\left(\frac{x}{5}\right)^n\right) - 1}{(n+\sin(5n!))\log(n^9)}, \qquad x \geq 0\,,$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la serie converge totalmente in I o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2+1) - 5 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*può essere utile osservare che* $\log(x^2+1) \leq |x|\,,$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$);

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione all'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome... Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 5\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{9\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{9}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{9}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq \frac{1}{9}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{9}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{9}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d)

2. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 4$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{14}{3}$ e $M = 5$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \frac{14}{3}$ e $M = 13$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 5$ e $M = 13$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 6$ e $M = 13$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 5$ e $M = 6$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{14}{3}$ e $M = 6$

3. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{1}{6}x + 4z\right)\,\mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 12t\,\vec{i} + \dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $18^{3/2} - 64$ $\boxed{\text{B}}$: $2(18^{1/2} - 4)$ $\boxed{\text{C}}$: $18^{1/2} - 4$ $\boxed{\text{D}}$: $2(18^{3/2} - 64)$ $\boxed{\text{E}}$: $3(18^{3/2} - 64)$ $\boxed{\text{F}}$: $3(18^{1/2} - 4)$

---

4. L'integrale triplo $\displaystyle\iiint_E \exp\left((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right)\,dxdydz$, dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^{64} - 1)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^{16} - 5)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{3}(e^{64} - 4)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{2}(e^{16} - 1)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3\pi}{2}(e^{16} - 5)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}(e^{64} - 5)$

---

5. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$f_n(x) = 2xe^{(x^2-16)n} + \left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

(a) $I = [-4,4]$ (b) $I =]-4,4]$ (c) f_n converge uniformemente in I (d) f_n converge uniformemente in $]-4,4[$ (e) f_n converge uniformemente in $[-A,A]$ per ogni $0 < A < 4$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^4 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e), (f)

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\exp\left(\left(\frac{x}{4}\right)^n\right) - 1}{(n + \sin(4n!))\log(n^{12})}, \qquad x \geq 0\,,$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la serie converge totalmente in I o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2 + 1) - 4 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*può essere utile osservare che* $\log(x^2 + 1) \leq |x|$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$);

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione all'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0,5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 6\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{11\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{11}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{11}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq \frac{1}{11}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{11}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{11}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e), (f)

2. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 5$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 6$ e $M = 14$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 7$ e $M = 14$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{17}{3}$ e $M = 7$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 6$ e $M = 7$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{17}{3}$ e $M = 14$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{17}{3}$ e $M = 6$

3. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{2}{15}x + 4z\right)\,\mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 15t\,\vec{i} + \dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3(27^{3/2}-125)$ $\boxed{\text{B}}$: $2(27^{3/2}-125)$ $\boxed{\text{C}}$: $3(27^{1/2}-5)$ $\boxed{\text{D}}$: $27^{3/2}-125$ $\boxed{\text{E}}$: $2(27^{1/2}-5)$ $\boxed{\text{F}}$: $27^{1/2}-5$

---

4. L'integrale triplo $\displaystyle\iiint_E \exp\left((x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right)\,dxdydz\,,$
dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 25\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^{125}-1)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{3}(e^{125}-5)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3\pi}{2}(e^{25}-6)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^{25}-6)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{2}(e^{125}-6)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}(e^{25}-1)$

---

5. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$f_n(x) = 2xe^{(x^2-25)n} + \left(\frac{x}{5}\right)^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni
(a) $I = [-5,5]$ (b) $I =]-5,5]$ (c) f_n converge uniformemente in I (d) f_n converge uniformemente in $]-5,5[$ (e) f_n converge uniformemente in $[-A,A]$ per ogni $0 < A < 5$ (f) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$
tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\exp\left(\left(\frac{x}{3}\right)^n\right) - 1}{(n+\sin(3n!))\log(n^{15})}, \qquad x \ge 0\,,$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;
(b) stabilire se la serie converge totalmente in I o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2+1) - 3 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*può essere utile osservare che* $\log(x^2+1) \le |x|$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$);

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione all'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.................. .... Corso di Laurea: ♢ AUTL; ♢ MATL; ♢ MECL

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI: Esercizi a risposta chiusa (Es. 1 – Es. 5): risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0, 5; risposta non data = 0.

1.	2.	3.	4.	5.
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D
E	E	E	E	E
F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 7\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{13\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{13}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{13}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq \frac{1}{13}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{13}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{13}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d)

2. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 6$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{20}{3}$ e $M = 7$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \frac{20}{3}$ e $M = 15$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 8$ e $M = 15$ $\boxed{\text{D}}$: $m = \frac{20}{3}$ e $M = 8$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 7$ e $M = 15$ $\boxed{\text{F}}$: $m = 7$ e $M = 8$

3. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{1}{9}x+4z\right)\,\mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t)=18t\,\vec{i}+\dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j}+t^3\vec{k}$, $t\in[0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2(38^{3/2}-216)$ $\boxed{\text{B}}$: $2(38^{1/2}-6)$ $\boxed{\text{C}}$: $3(38^{1/2}-6)$ $\boxed{\text{D}}$: $38^{3/2}-216$ $\boxed{\text{E}}$: $3(38^{3/2}-216)$ $\boxed{\text{F}}$: $38^{1/2}-6$

---

4. L'integrale triplo $\displaystyle\iiint_E \exp\left((x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right)\,dxdydz\,,$ dove $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 36\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}(e^{36}-1)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{3}(e^{216}-6)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3\pi}{2}(e^{36}-7)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^{216}-1)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{2}(e^{216}-7)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{4\pi}{3}(e^{36}-7)$

---

5. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$f_n(x)=2xe^{(x^2-36)n}+\left(\frac{x}{6}\right)^{2n+1}\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Sia I l'insieme di convergenza puntuale di f_n. Delle seguenti affermazioni

(a) $I=[-6,6]$ (b) $I=]-6,6]$ (c) f_n converge uniformemente in I (d) f_n converge uniformemente in $]-6,6[$ (e) f_n converge uniformemente in $[-A,A]$ per ogni $0<A<6$ (f) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^6 f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (d), (e), (f)

---

6. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\exp\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)-1}{(n+\sin(2n!))\log(n^{18})},\qquad x\ge 0\,,$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;

(b) stabilire se la serie converge totalmente in I o in suoi sottoinsiemi.

[**Punteggio: 5 punti**]

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\log(y^2+1)-2\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$

Al variare di $y_0\in\mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*può essere utile osservare che* $\log(x^2+1)\le|x|$, *per ogni* $x\in\mathbb{R}$);

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione all'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

[**Punteggio: 5 punti**]