
Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizio 1: risposta esatta = +3; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0; esercizi 2-5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE il foglio A con TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (c) $S(2\pi)+S(3\pi) = \pi$ (d) $S(2\pi) + S(3\pi) = 2\pi$ (e) $S(2\pi) + S(3\pi) = 0$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b c $\boxed{\text{B}}$: a b e $\boxed{\text{C}}$: a d $\boxed{\text{D}}$: a c $\boxed{\text{E}}$: c $\boxed{\text{F}}$: b e

---

2. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdydz$ dove T è la parte di spazio interna al cilindro $x^2 + y^2 = 2$, esterna al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e compresa tra i piani $z = -1$ e $z = 1$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\pi \log 2$ $\boxed{\text{B}}$: $4\pi \log 2$ $\boxed{\text{C}}$: 4π $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\pi^2 \log 2$ $\boxed{\text{F}}$: $2 - \frac{\pi}{2}$

---

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2)$.

Delle seguenti affermazioni

(a) f ammette un solo punto di minimo assoluto (b) f ammette infiniti punti di minimo assoluto (c) f ammette infiniti punti di massimo relativo (d) f ammette infiniti punti di sella (e) f ammette un solo punto di massimo relativo ;

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: d e $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b c $\boxed{\text{D}}$: a d $\boxed{\text{E}}$: a e $\boxed{\text{F}}$: b e

---

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2 + 2xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (c) f ammette le derivate parziali in $(0,0)$ (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: b c $\boxed{\text{B}}$: d e $\boxed{\text{C}}$: a b $\boxed{\text{D}}$: a c e $\boxed{\text{E}}$: a d $\boxed{\text{F}}$: c d

---

5. Siano $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\overrightarrow{F}(x,y) = (x-y)\,\vec{i} + 7y\,\vec{j}$ e Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 14x = 0$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 49π $\boxed{\text{B}}$: 7π $\boxed{\text{C}}$: -49π $\boxed{\text{D}}$: -49 $\boxed{\text{E}}$: $\pi^2 \log 7$ $\boxed{\text{F}}$: $-49\pi^2$

---

6. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}^+$:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{7}\right)^n \log\left(\frac{x}{7}\right)^n .$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Sia data la serie di funzioni così definita in $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2 + 7n}$. Studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale (*può essere utile ricordare che vale* $|\sin y| \leq |y|, \quad \forall y \in \mathbb{R}$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^{y-3}(y-2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:

---

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di periodo 2π, definita in $(-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità; sia $S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ la sua serie di Fourier. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (c) $S(2\pi)+S(3\pi) = \pi$ (d) $S(2\pi) + S(3\pi) = 2\pi$ (e) $S(2\pi) + S(3\pi) = 0$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b c $\boxed{\text{B}}$: a b e $\boxed{\text{C}}$: a d $\boxed{\text{D}}$: a c $\boxed{\text{E}}$: c $\boxed{\text{F}}$: b e

---

2. Calcolare l'integrale triplo $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdydz$ dove T è la parte di spazio interna al cilindro $x^2 + y^2 = 2$, esterna al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e compresa tra i piani $z = -1$ e $z = 1$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\pi \log 2$ $\boxed{\text{B}}$: $4\pi \log 2$ $\boxed{\text{C}}$: 4π $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\pi^2 \log 2$ $\boxed{\text{F}}$: $2 - \frac{\pi}{2}$

---

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2)$.

Delle seguenti affermazioni

(a) f ammette un solo punto di minimo assoluto (b) f ammette infiniti punti di minimo assoluto (c) f ammette infiniti punti di massimo relativo (d) f ammette infiniti punti di sella (e) f ammette un solo punto di massimo relativo;

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: d e $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b c $\boxed{\text{D}}$: a d $\boxed{\text{E}}$: a e $\boxed{\text{F}}$: b e

---

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2 + 2xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0, 0)$ (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ (c) f ammette le derivate parziali in $(0, 0)$ (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ (e) f è differenziabile in $(0, 0)$; le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: b c $\boxed{\text{B}}$: d e $\boxed{\text{C}}$: a b $\boxed{\text{D}}$: a c e $\boxed{\text{E}}$: a d $\boxed{\text{F}}$: c d

---

5. Siano $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\overrightarrow{F}(x, y) = (x - y)\,\vec{i} + 7y\,\vec{j}$ e Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 14x = 0$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 49π $\boxed{\text{B}}$: 7π $\boxed{\text{C}}$: -49π $\boxed{\text{D}}$: -49 $\boxed{\text{E}}$: $\pi^2 \log 7$ $\boxed{\text{F}}$: $-49\pi^2$

---

6. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$ così definita in $\mathbb{R}^+$:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{7}\right)^n \log\left(\frac{x}{7}\right)^n .$$

Si determini l'insieme I di convergenza puntuale e la funzione limite. Si discuta la convergenza uniforme in I ed eventualmente nei suoi sottoinsiemi.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Sia data la serie di funzioni così definita in $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+7n}$. Studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale (*può essere utile ricordare che vale* $|\sin y| \leq |y|, \quad \forall y \in \mathbb{R}$).

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

8. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^{y-3}(y-2)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$ Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale e globale. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra e si studi il comportamento asintotico delle soluzioni.

. . . .

Risposta [5 punti]:
