Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ AUTLT; ♢ MATLT; ♢ MECLT; ♢ MECMLT.

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. Esercizi 1,2,4,5: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0; esercizio 3: risposta esatta = +3; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. CONSEGNARE il foglio A con TUTTI I FOGLI DELLO SVOLGIMENTO e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+\sin(7x^\alpha)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \geq 2$ (b) se $\alpha > 3$, allora $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ (d) se $\alpha = 3$, allora $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 7v_1^3$ le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b $\boxed{\text{B}}$: b d $\boxed{\text{C}}$: a c d $\boxed{\text{D}}$: b c d $\boxed{\text{E}}$: b c $\boxed{\text{F}}$: c d

---

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2y(y-7x)\,.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f ammette un solo punto di minimo relativo (b) f ammette infiniti punti di minimo relativo (c) f ammette infiniti punti di massimo relativo (d) f ammette un solo punto di sella (e) f ammette un solo punto di massimo relativo;

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: b d $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b c $\boxed{\text{D}}$: a d $\boxed{\text{E}}$: a e $\boxed{\text{F}}$: b e

---

3. Siano $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{2}y\,\vec{i}_1 + x\,\vec{i}_2$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 3t^2\,\vec{i}_1 + 2t\,\vec{i}_2$, $0 \leq t \leq 1$. Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\,d\Gamma$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: 4 $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: 5 $\boxed{\text{E}}$: 4π $\boxed{\text{F}}$: 2π

---

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left[\frac{9}{2} \frac{xy^2}{x^2+y^2} + \sin(x^2y^3) \right] dxdy \,,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \le x^2+y^2 \le 2\,;\ |y| \le x\}$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 4 $\boxed{\text{B}}$: 4π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{2^3-1}{2^3}$ $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2^3-1}{2^4}$ $\boxed{\text{F}}$: 3π

---

5. Sia S la semisuperficie sferica (contenuta nel semispazio $z > 0$) di centro l'origine e raggio 1. Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S 21\, z^2\, dS.$$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 6 $\boxed{\text{B}}$: 7 $\boxed{\text{C}}$: 49π $\boxed{\text{D}}$: 49 $\boxed{\text{E}}$: 7π $\boxed{\text{F}}$: 14π

---

6. Al variare di $\beta \in [0, +\infty[$, determinare l'insieme della convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)(x-1)}}{n^\beta}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Discutere inoltre la convergenza totale della serie. Calcolare la somma della serie per $\beta = 1$.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{4t+4}\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra. **[5 punti]**

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{4t+4} \\ \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

. . . .

Risposta [4 punti]:

---

1. Siano $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 + \sin(7x^\alpha)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Delle seguenti affermazioni
(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \geq 2$ (b) se $\alpha > 3$, allora $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ (d) se $\alpha = 3$, allora $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 7v_1^3$ le uniche corrette sono
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b $\boxed{\text{B}}$: b d $\boxed{\text{C}}$: a c d $\boxed{\text{D}}$: b c d $\boxed{\text{E}}$: b c $\boxed{\text{F}}$: c d

---

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = x^2 y(y - 7x)\,.$$
Delle seguenti affermazioni
(a) f ammette un solo punto di minimo relativo (b) f ammette infiniti punti di minimo relativo (c) f ammette infiniti punti di massimo relativo (d) f ammette un solo punto di sella (e) f ammette un solo punto di massimo relativo;
le uniche corrette sono
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: b d $\boxed{\text{B}}$: a c $\boxed{\text{C}}$: b c $\boxed{\text{D}}$: a d $\boxed{\text{E}}$: a e $\boxed{\text{F}}$: b e

---

3. Siano $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{2}y\,\vec{i}_1 + x\,\vec{i}_2$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 3t^2\,\vec{i}_1 + 2t\,\vec{i}_2$, $0 \leq t \leq 1$. Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\, d\Gamma$.
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: 4 $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: 5 $\boxed{\text{E}}$: 4π $\boxed{\text{F}}$: 2π

---

4. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_T \left[\frac{9}{2}\frac{xy^2}{x^2+y^2} + \sin(x^2y^3)\right] dxdy\,,$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 2\,;\ |y| \leq x\}$.
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 4 $\boxed{\text{B}}$: 4π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{2^3-1}{2^3}$ $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2^3-1}{2^4}$ $\boxed{\text{F}}$: 3π

---

5. Sia S la semisuperficie sferica (contenuta nel semispazio $z > 0$) di centro l'origine e raggio 1. Calcolare l'integrale di superficie
$$\iint_S 21\, z^2\, dS.$$
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 6 $\boxed{\text{B}}$: 7 $\boxed{\text{C}}$: 49π $\boxed{\text{D}}$: 49 $\boxed{\text{E}}$: 7π $\boxed{\text{F}}$: 14π

---

6. Al variare di $\beta \in [0, +\infty[$, determinare l'insieme della convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)(x-1)}}{n^\beta}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Discutere inoltre la convergenza totale della serie. Calcolare la somma della serie per $\beta = 1$.

....

Risposta [4 punti]:

---

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, se il problema ammette esistenza ed unicità locale. Si determinino le eventuali soluzioni stazionarie. Si studino, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, monotonia, concavità e flessi delle soluzioni. Si discuta se l'intervallo massimale di esistenza può essere illimitato a destra. **[5 punti]**

---

8. Determinare la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{4t + 4} \\ \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

e confrontare i risultati ottenuti con l'esercizio precedente.

....

Risposta [4 punti]:
