SERIE NUMERICHE

Con l'introduzione delle serie vogliamo estendere l'operazione algebrica di somma ad un numero infinito di addendi.

Def. Data la successione $\{a_n\}$, definiamo la successione $\{s_n\}$ ponendo

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Se tale successione non oscilla, allora il limite della successione $\{s_n\}$ si dice *somma della serie* e si denota con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (o anche con $\sum a_n$ o $\sum_n a_n$ se non occorre specificare meglio).

La successione $\{s_n\}$ viene detta successione delle *ridotte* o *somme parziali* della serie.

Se la successione $\{s_n\}$ converge (risp. diverge positiv., risp. diverge negativ., risp. oscilla), allora si dice che la serie converge (risp. diverge positiv., risp. diverge negativ., risp. oscilla o è *indeterminata*).

Studiare il *carattere della serie* significa stabilire se la serie è convergente, divergente o indeterminata.

L'operazione di calcolo del limite delle ridotte parziali viene detto *sommare la serie.*

ESEMPI: 1) $a_n = 1\ \forall n$. Allora $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \to +\infty$ e quindi la serie diverge positivamente;

2) $a_n = (-1)^n$. Allora

$$s_n = 1 - 1 + 1 \ldots = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

quindi la serie oscilla;

3) $a_n = 2^{-n}$. Allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - 2^{-n} \to 2$$

e quindi la serie converge e la somma vale 2.

La definizione di serie ci permette di ottenere direttamente dai risultati sulle successioni i corrispondenti teoremi per le serie.

Teorema. (LINEARITÀ) *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni e $c \in \mathbf{R}$. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono, allora convergono anche $\sum (a_n + b_n)$ e $\sum (c a_n)$, e si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Teorema. *Se la serie* $\sum a_n$ *converge allora* $a_n \to 0$.

Dim. $\sum a_n = L \iff \lim_n s_n = L$. Allora (dato che $a_n = s_n - s_{n-1}$)

$\lim_n a_n = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = L - L = 0.$ □

OSSERVAZIONI: 1) se modifichiamo i primi m termini di una successione allora il carattere della serie relativa non viene modificato: se $a_n = b_n$ per $n > m$, allora (se $n > m$)

$$\sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k) = \sum_{k=0}^{m}(b_k - a_k)$$

e quindi le ridotte parziali n-ime differiscono per una quantità indipendente da n.

2) il teorema di linearità vale anche per serie divergenti quando non si hanno forme indeterminate.

3) se a_n è definita solo per n maggiore di un certo k, allora si estende la definizione di serie (ponendo $a_n = 0$ per $n < k$). In questo caso si scriverà

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Alcune serie importanti

La serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Questa serie diverge a $+\infty$ (verrà dimostrato in seguito).

NOTA: $\frac{1}{n} \to 0$ ma la serie diverge; questo mostra che $a_n \to 0$ **è condizione necessaria** ma **non è condizione sufficiente** affinchè $\sum_n a_n$ converga.

La serie geometrica di *ragione* $q \in \mathbf{R}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Nel caso $q = 0$, poniamo $0^0 = 1$. Ricordiamo che si ha

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} q^n, \qquad \text{se } q \neq 1$$

e

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1, \qquad \text{se } q = 1.$$

Quindi la serie

converge a $\dfrac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$

diverge positivamente se $q \geq 1$

oscilla se $q \leq -1$.

SERIE A TERMINI POSITIVI

OSSERVAZIONE

La successione delle ridotte $\{s_n\}$ è non decrescente se e solo se la successione $\{a_n\}$ è non negativa.

Infatti $\quad s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$.

Possiamo quindi usare i teoremi per le successioni monotone e dedurre il seguente

Teorema. *Se la successione $\{a_n\}$ è non negativa, allora $\sum_n a_n$ non oscilla e si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_n \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

NOTE: 1) il teorema vale anche se $\exists m \in \mathbf{N}$: $a_n \geq 0\ \forall n \geq m$;

2) nelle ipotesi del teorema si possono avere solo i casi $\sum a_n \in \mathbf{R}$ e $\sum a_n = +\infty$.

ESERCIZIO: cosa succede se $a_n \leq 0\ \forall n$?

Ora dimostriamo che la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Dato che $\dfrac{1}{n} > 0$ sappiamo che la serie non oscilla. Per assurdo supponiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = L < +\infty.$$

Si deve avere

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) = L - L = 0.$$

Ma allora si ha

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \frac{1}{2}.$$

Assurdo. $\square$

Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Criterio del confronto. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni non negative, tali che $a_n \leq b_n\ \forall n$. Allora:*

i) se $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge;

ii) se $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge.

Dim. la tesi si ha subito dal teorema del confronto per le successioni applicato alle ridotte delle due serie.

$\square$

Più in generale, basta supporre che $\exists m$: $a_n \le b_n \ \forall n \ge m$. Per dimostrare il teorema basta notare che per $n > m$ si ha $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{m}(a_k - b_k) + \sum_{k=0}^{n} b_k$.

ESEMPIO: studiamo il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

Si ha $0 < \log n < n \ \forall n \ge 2$ e quindi $\dfrac{1}{\log n} \ge \dfrac{1}{n}$. Dato che la serie armonica diverge, diverge anche $\sum \frac{1}{\log n}$.

ESEMPIO: consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n4^{-n}$. Confrontiamola con la serie geometrica di ragione 1/2: $\sum 2^{-n}$. Si ha $\dfrac{2^{-n}}{n4^{-n}} = \dfrac{2^n}{n} > 1$. Dato che la serie geometrica converge, anche la serie $\sum n4^{-n}$ converge.

Criterio del confronto asintotico. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni non negative, con $b_n > 0 \ \forall n$, tali che esista il limite $L = \lim_n \dfrac{a_n}{b_n}$. Allora:*

i) se $L \in]0, +\infty[$, $\sum a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum b_n$ converge;

ii) se $L = 0$ e $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge;

iii) se $L = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge.

Dim. i1) $a_n/b_n \to L < +\infty \Longrightarrow \{a_n/b_n\}$ limitata $\Longrightarrow \exists c > 0$: $a_n \le cb_n \ \forall n$. Quindi, se $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge per il criterio del confronto e per la linearità.

i2) $a_n/b_n \to L > 0 \Longrightarrow b_n/a_n \to 1/L < +\infty$ e, come sopra, dalla convergenza di $\sum a_n$ si deduce la convergenza di $\sum b_n$.

ii) la tesi si prova come in i1).

iii) $a_n/b_n \to +\infty \Longrightarrow \exists m : a_n/b_n > 1 \ \ \forall n \ge m$. La tesi segue dal criterio del confronto. $\square$

Criterio del rapporto asintotico. *Sia $\{a_n\}$ una successione strett. positiva, ed esista il limite*

$$L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad \textit{Allora}$$

i) se $L < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge;

ii) se $L > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge.

Dim. i) $\lim_n(a_{n+1}/a_n) = L < 1 \Longrightarrow \exists m$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{L+1}{2} < 1 \ \forall n \ge m$. La tesi si ha dal criterio del rapporto.

ii) $\lim_n(a_{n+1}/a_n) = L > 1 \Longrightarrow \exists m$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \ \forall n \ge m \Longrightarrow a_n \ge a_m > 0 \ \forall n \ge m \Longrightarrow \{a_n\}$ non infinitesima $\Longrightarrow \sum a_n$ non converge. $\square$

ESEMPIO: consideriamo $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \, \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1) \, \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-n} \to \frac{1}{e} < 1$$

quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

Criterio della radice asintotico. *Sia $\{a_n\}$ una successione non negativa, ed esista il limite*

$L = \lim_n (a_n)^{\frac{1}{n}}$. Allora

i) se $L < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge;

ii) se $L > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge.

Dim. ESERCIZIO (è uguale alla dimostrazione del criterio del rapporto asintotico). $\square$

ESEMPIO: $a_n = 2^n \, n^{-n}$. Si ha $\lim_n (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{2}{n} = 0$ e quindi la serie $\sum 2^n n^{-n}$ converge.

ALTRE SERIE NOTEVOLI

La serie armonica generalizzata di parametro λ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}.$$

i) diverge se $\lambda \leq 1$,

ii) converge se $\lambda > 1$.

Dim. (i) $\lambda \leq 1$ implica $n^{\lambda} \leq n$, $\frac{1}{n^{\lambda}} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n$. Allora la serie armonica generalizzata di parametro $\lambda \leq 1$ diverge per confronto con la serie armonica divergente.

(ii) Studiamo la serie (di **Mengoli**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big).$$

Si tratta di una *serie telescopica* per la proprietà della ridotta n-ima che vale

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge e la sua somma vale 1. Le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

hanno lo stesso carattere per il criterio del confronto asintotico e quindi converge anche la serie armonica generalizzata di parametro 2. Se $\lambda > 2$ allora

$$\frac{1}{n^\lambda} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n$$

e quindi convergono anche le serie armoniche generalizzate di parametro $\lambda > 2$.

Rimane da considerare il caso $1 < \lambda < 2$.

Proposizione (Criterio di condensazione di Cauchy). Sia $\{a_n\}$ una successione non negativa e non crescente. Allora $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\sum_n 2^n a_{2^n}$ converge.

Se $a_n = \frac{1}{n^\lambda}$, allora $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\lambda} = \frac{1}{(2^n)^{\lambda-1}} = (\frac{1}{2^{\lambda-1}})^n$. Se $\lambda > 1$, allora $2^{\lambda-1} > 1$, $\frac{1}{2^{\lambda-1}} < 1$. La convergenza della serie armonica generalizzata di parametro $\lambda > 1$ segue dal confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\lambda-1}}$. Ovviamente, si può utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy per studiare il carattere della serie armonica generalizzata anche nel caso $0 < \lambda \leq 1$.
OSSERVAZIONE: se nei criteri del rapporto e della radice si ha $L = 1$ nulla si può dire a priori della convergenza della serie.

ESEMPI: 1) $\sum 1/n$ diverge e $n/(n+1) \to 1$;

2) $\sum 1/n^2$ converge e $n^2/(n+1)^2 \to 1$

(gli stessi esempi valgono per il criterio della radice).

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}.$$

i) converge se $\alpha > 1$;

ii) diverge se $\alpha \leq 1$.

Dim. (per esercizio): usare il criterio di condensazione di Cauchy.

ESERCIZI. (stabilire il carattere delle serie)

1) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2}$. Basta confrontare la serie con la serie geometrica di ragione $1/2$, dato che $2^{-n^2} \leq 2^{-n}$ $\forall n \geq 1$. Quindi la serie converge.

1)bis La stessa serie si può trattare con il criterio della radice asintotico, dato che $(2^{-n^2})^{1/n} = 2^{-n} \to 0$.

1)ter La stessa serie si può trattare con il criterio del rapporto asintotico, dato che

$$\frac{2^{-(n+1)^2}}{2^{-n^2}} = 2^{-2n-1} = \frac{1}{2} 2^{-2n} \to 0.$$

2) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^3+5}{n!\,(n-3)}$. Notiamo che per $n \geq 4$ si ha

$n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$,

per cui per $n \geq 4$ si ha

$\frac{n^3+5}{n!\,(n-3)} \leq \frac{n^3+5}{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}$.

Confrontiamo quest'ultima successione con la successione $1/n^2$: si ha

$$\lim_n \frac{n^2(n^3+5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}$$

$$= \lim_n \frac{1+5n^{-3}}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})^2} = 1,$$

per cui le serie

$$\sum \frac{n^3+5}{n(n-1)(n-2)(n-3)^2} \qquad e \sum \frac{1}{n^2}$$

hanno lo stesso carattere. La seconda è una serie armonica generalizzata di parametro $2 > 1$ e quindi converge.

2)bis La stessa serie si può trattare con il criterio del rapporto asintotico:

$$\lim_n \frac{((n+1)^3+5)}{(n+1)!(n-2)} \frac{n!(n-3)}{(n^3+5)}$$

$$= \lim_n \frac{((n+1)^3+5)}{(n^3+5)} \frac{(n-3)}{(n-2)} \frac{1}{(n+1)} = 0.$$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\log n^2)^n}$. Sappiamo che per $n \geq 1$ si ha

$$\frac{\pi}{4} \leq \arctan n \leq \frac{\pi}{2},$$

quindi

$\frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n^2)^n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\log n^2)^n} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n^2)^n}$.

Dunque per il criterio del confronto (applicato due volte) la nostra serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n^2)^n},$$

alla quale si applica facilmente il criterio della radice asintotico. Dato che

$\lim_n \frac{1}{(\log n^2)} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{1}{\log n} = 0$, la serie converge.

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}\, x^n.$ $(x>0)$ La serie è a termini positivi. Notiamo che si ha

$$\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 1/3 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

possiamo quindi scrivere la ridotta $2n+1$-esima come

$$s_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} 3x^{2k+1}, \text{ quindi}$$

$$\lim_n s_{2n+1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k + 3x \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k.$$

Entrambe le serie convergono $\iff x^2 < 1$ e quindi la nostra serie converge $\iff x < 1$.

Ricordando che la somma della serie geometrica di ragione q con $|q| < 1$ è $1/(1-q)$, si può calcolare la somma della serie (per $|x| < 1$), che vale

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(1-x^2)} + 3x\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{(1+9x)}{3(1-x^2)}.$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

Ricordiamo la definizione di successione di Cauchy.
$\{a_n\}$ è di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbf{N}$: $\forall n, n' \geq m \quad |a_n - a_{n'}| \leq \varepsilon$.
Non è restrittivo supporre che sia $n' > n$, cioè $n' = n + p$ per qualche $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Quindi la definizione si riscrive $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq m,\ \forall p > 0 \quad |a_n - a_{n+p}| \leq \varepsilon$.
Applichiamo quest'ultima formulazione al caso delle serie: la applichiamo, cioè, alla successione $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ delle somme parziali.
Dal criterio di Cauchy per successioni segue allora il

Il Criterio di Cauchy (per serie) $\sum a_n$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq m$, $\forall p > 0$

$$\Big|s_{n+p} - s_n\Big| = \Big|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| \leq \varepsilon.$$

Teorema. (CONVERGENZA ASSOLUTA) *Sia* $\{a_k\} \subset \mathbf{C}$. *Se* $\sum |a_k|$ *converge allora converge anche* $\sum a_k$ *e si ha*

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

Dim. Se $\sum |a_k|$ converge, per il criterio di Cauchy ($\Longrightarrow$) si ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq m$, $\forall p > 0$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare, si trova

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

da cui, ancora per il criterio di Cauchy ($\Longleftarrow$), si legge la convergenza di $\sum a_k$.
Infine, per dimostrare che $\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, basta notare che $\Big|\sum_{k=0}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \forall n$ e passare al limite per $n \to +\infty$ (teorema del confronto per successioni).

$\square$

Def. $\sum a_n$ è *assolutamente convergente* se $\sum |a_n|$ converge;
$\sum a_n$ è *semplicemente convergente* se $\sum a_n$ converge e $\sum |a_n|$ **non** converge.

Serie importanti

(verificarne la convergenza usando il teorema della convergenza assoluta e, per le serie dei moduli, il criterio del rapporto)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in \mathbf{R} : |z| < 1;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z = \exp z \quad \forall z \in \mathbf{R};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z \quad \forall z \in \mathbf{R};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z \quad \forall z \in \mathbf{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \log(1+x) \quad \text{per } -1 < x \leq 1;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arctan x \quad \text{per } -1 \leq x \leq 1.$$

NOTA: la convergenza per $|x| = 1$ nelle ultime due formule non segue dal criterio del rapporto, e verrà dimostrata in seguito.
OSSERVAZIONE

Ricordando le definizioni

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

si ottiene

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

per ogni $z \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO

Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

Se $x \geq 0$ possiamo scrivere $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$, per cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{x}).$$

Se invece $x < 0$, allora $x^n = (-1)^n |x|^n = (-1)^n (\sqrt{|x|})^{2n}$, per cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{|x|}).$$

□

Criterio di Leibniz. *Sia $\{a_n\}$ una successione non crescente e infinitesima. Allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ converge.}$$

Chiamata $\{s_n\}$ la successione delle ridotte parziali allora $\{s_{2n}\}$ è non crescente, e $\{s_{2n+1}\}$ è non decrescente.

Inoltre si ha

$$(*) \qquad \left| s_n - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1} \quad \forall n.$$

Dim. Verifichiamo che $\{s_{2n}\}$ è non crescente:

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$

$$= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \quad \text{poichè } a_{2n+2} \leq a_{2n+1}.$$

Analogamente si verifica che $\{s_{2n+1}\}$ è non decrescente.

Inoltre si ha $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$ per cui $\{s_{2n}\}$ è limitata. Dunque esiste finito il limite $\lim_n s_{2n} = L$. Dal momento che $\{s_{2n} - s_{2n+1}\}$ è infinitesima, si ha $s_n \to L$.

Dalla monotonia delle due sottosuccessioni, si ha

$$s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq L \leq s_{2n}, \qquad \text{da cui}$$

$0 \leq L - s_{2n-1} \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$ e anche

$0 \leq s_{2n} - L \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$.

□

ESEMPI

1) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (*serie armonica a segni alterni*) converge (e la sua somma vale $\log 2$).

2) analogamente converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1}$ (e la sua somma vale $\arctan 1 = \pi/4$).

3) usiamo $(*)$ per ottenere una stima dell'errore nel calcolo approssimato di $\sin 1$.

Dato che $\sin 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!}$, per ogni n si ha

$$\left|\sin 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Volendo, ad esempio, un errore inferiore a 10^{-3}, basterà scegliere n tale che $(2n+3)! > 1000$. Il primo valore che verifica la disuguaglianza è $n = 2$.

ESERCIZI

1) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}}$$

Osserviamo che vale la doppia diseguaglianza

$$1 \leq 2 + \sin n \leq 3,$$

e quindi la serie è a termini positivi. Dunque la somma della serie esiste finita o uguale a $+\infty$. Inoltre valgono le diseguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Applicando due volte il criterio del confronto si ottiene che il carattere della serie in questione è lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

A sua volta, applicando il criterio del confronto asintotico, possiamo sostituire a $(n+1)$ semplicemente n (ovviamente $\displaystyle\lim_n \frac{n+1}{n} = 1$), ottenendo così la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Questa serie diverge perchè $\dfrac{2}{3} < 1$.

2) Discutere il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}$$
La serie non è a termini di segno definito, quindi non si possono applicare i relativi criteri. Possiamo cercare di applicare il teorema della convergenza assoluta. Si ha
$$\Big|\frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}\Big| = \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}}.$$
Alla serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}},$$
ora a termini positivi, possiamo applicare il criterio del confronto, ricordando che $|\cos n| \leq 1$ e quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)|\cos n|}{\sqrt[3]{n^7}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7}}.$$
Per il criterio del confronto asintotico quest'ultima serie ha lo stesso carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}},$$
che è convergente poichè $\frac{4}{3} > 1$. Dunque la serie di partenza è assolutamente convergente, e quindi converge.

3) Discutere il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2+\sin(e^n))}{3^n}$$
Osserviamo che vale la diseguaglianza
$$0 \leq n^2 - 1 \leq n^2 + \sin(e^n), \qquad \text{per ogni } n \geq 1$$
e quindi la serie è a termini positivi. Dunque la somma della serie esiste finita o uguale a $+\infty$. Notando che si ha
$$\lim_n \frac{n^2+\sin(e^n)}{n^2} = 1,$$
si ha, per il criterio del confronto asintotico, che la nostra serie ha lo stesso carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n^2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n n^2.$$
Possiamo confrontare questa serie con una serie geometrica di ragione α con $1 > \alpha > \frac{2}{3}$, per esempio $\alpha = \frac{3}{4}$. Si ha
$$\lim_n \frac{(3/4)^n}{(2/3)^n n^2} = \lim_n \Big(\frac{9}{8}\Big)^n \frac{1}{n^2} = +\infty,$$
quindi per il criterio del confronto asintotico, la nostra serie converge, convergendo la serie geometrica di ragione $\frac{3}{4}$.

4) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}}$$

La serie è evidentemente a termini positivi, per cui o converge o diverge positivamente. Applichiamo il criterio del confronto asintotico con la serie relativa alla successione

$$n^{-\frac{15-6}{7}} = \frac{1}{n^{9/7}}.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned}\lim_n n^{\frac{9}{7}} \sqrt[7]{\frac{n^6+n^3}{n^{15}+1}} &= \lim_n \sqrt[7]{\frac{n^9(n^6+n^3)}{n^{15}+1}} \\ = \lim_n \sqrt[7]{\frac{n^{15}+n^{12}}{n^{15}+1}} &= \lim_n \sqrt[7]{\frac{1+n^{-3}}{1+n^{-15}}} = 1\end{aligned}$$

Quindi il carattere della serie in questione è lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/7}},$$

che è convergente poichè $\frac{9}{7} > 1$.

5) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{1}{4}} \log(n^n + n!)}$$

Si ha

$$\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}} \le 1 - n^{\frac{3}{5}} \le 0 \qquad \text{per ogni } n \ge 1,$$

mentre, dato che $n^n + n! > 1$,

$$\log(n^n + n!) > 0 \qquad \text{per ogni } n \ge 1,$$

quindi la serie è a termini *negativi* e dunque o converge o diverge *negativamente*. Applichiamo il criterio del confronto. Dato che si ha

$$\lim_n \frac{\sin(n^3) - n^{\frac{3}{5}}}{-n^{\frac{3}{5}}} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{\log(n^n + n!)}{n \log n} &= \lim_n \frac{\log(n^n(1 + (n!/n^n))}{n \log n} \\ &= \lim_n \frac{\log(n^n) + \log(1 + (n!/n^n))}{n \log n} \\ &= \lim_n \frac{n \log n + \log(1 + (n!/n^n))}{n \log n} = 1,\end{aligned}$$

il carattere della serie in questione è uguale a quello della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{1}{4}} n \log n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{13}{20}} \log n}.$$

Possiamo applicare il teorema del confronto . Dato che $\frac{13}{20} < 1$ possiamo fare il confronto con una serie armonica generalizzata divergente del tipo $-\sum n^{-\alpha}$, con $\frac{13}{20} < \alpha < 1$, per esempio $\alpha = \frac{3}{4}$. Si ha

$$\lim_n \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{13}{20}} \log n} = \lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}}}{\log n} = +\infty,$$

e quindi la nostra serie diverge (negativamente).

6) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\ 3^{n+2}}{n!}$$

Tenendo presente che si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{R}$$

cerchiamo di trasformare la nostra serie in questa forma. Per prima cosa scriviamo

$$2^{n-1}\ 3^{n+2} = 2^n 2^{-1} 3^n 3^2 = \frac{9}{2} 6^n,$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\ 3^{n+2}}{n!} = \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}.$$

Sommando e sottraendo la quantità

$$\frac{9}{2} = \frac{9}{2} \frac{6^0}{0!},$$

si ottiene

$$\frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!} = \frac{9}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} - 1) = \frac{9}{2} (e^6 - 1).$$

7) Si calcoli la somma della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!}$$
Cerchiamo di ottenere un'esponenziale. Prima di tutto cambiamo variabile ponendo $k=n-1$, per cui
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+2}\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!}$$
$$=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^k}{k!};$$
quindi sommando e sottraendo $1=(-\sqrt{2})^0$ si ottiene
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^k}{k!}-1=e^{-\sqrt{2}}-1,$$
e infine
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!}=2(e^{-\sqrt{2}}-1).$$

8) Sia E l'insieme dei numeri reali α tali che
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+\log n}{n^\alpha\log(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$
sia divergente. Calcolare $\sup E$.

La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del confronto asintotico, ricordando che
$$\lim_n\frac{\log n}{n^2}=0,\qquad \lim_n\frac{\log(n+1)}{\log n}=1,$$
e quindi il carattere della serie in questione è lo stesso del carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^\alpha\log n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}}|\log n|^{\frac{1}{2}}}.$$
Questa serie è convergente se $\dfrac{\alpha-2}{2}>1$ (per confronto con la serie $\sum n^{(2-\alpha)/2}$), mentre diverge per $\dfrac{\alpha-2}{2}\leq 1$ (per confronto con la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n|\log n|^{\frac{1}{2}}}$). Dunque si ha
$$E=\{\alpha\in\mathbf{R}:\ \frac{\alpha-2}{2}\leq 1\}=]-\infty,4],$$
e $\sup E=4$.

9) Trovare il numero reale x tale che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^{n-1}}{(n-1)!} = -3.$$

Possiamo riscrivere la serie come

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^{n-1}}{(n-1)!} = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$= 4\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1 \Big) = 4(\exp(2x) - 1),$$

quindi dobbiamo risolvere l'equazione

$$4(\exp(2x) - 1) = -3, \qquad \text{ovvero} \qquad \exp(2x) = \frac{1}{4},$$

da cui

$$2x = \log \frac{1}{4}, \qquad \text{e infine} \qquad x = \frac{1}{2} \log \frac{1}{4} = -\log 2.$$

10) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

La serie è a termini strettamente positivi. La presenza del fattoriale ci suggerisce l'applicazione del criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n^n}$$

$$= \Big(\frac{n+1}{n} \Big)^n \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \Big(1 + \frac{1}{n} \Big)^n \frac{1}{(2n+1)2}.$$

Dato che $\quad \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n \to e, \quad \dfrac{1}{(2n+1)2} \to 0,$

si ha $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$. Dunque per il criterio del rapporto asintotico la serie converge.

NOTA: come corollario dell'esercizio 10 si ha che

$$\lim_n \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

ESERCIZIO: dimostrarlo per via diretta.

11) Discutere il carattere della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n \log n}}.$$
La serie è a termini positivi. La presenza della potenza n-esima ci invita all'applicazione del criterio della radice. Si ha
$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{3^{\log n}}.$$
Osserviamo (dalla def. di log) che
$$3^{\log n} = e^{\log 3 \log n} = n^{\log 3},$$
per cui
$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n^{\log 3}} = \frac{1}{n^{\log 3 - 1}} \to 0;$$
quindi la serie converge per il criterio asintotico della radice.

NOTA: come corollario dell'esercizio 10 si ha che
$$\lim_n \frac{n^n}{3^{n \log n}} = 0.$$
ESERCIZIO: dimostrarlo per via diretta.

12) Discutere il carattere della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}.$$
La serie è a termini positivi. La presenza della potenza n-esima ci invita all'applicazione del criterio della radice, ottenendo
$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2^n} \to 0.$$
Dunque la serie è convergente per il criterio asintotico della radice.

13) Discutere il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}).$$
Osserviamo che vale il limite
$$\lim_n n \log(1 + \frac{1}{n}) = 1.$$
Dunque per il criterio del confronto asintotico, le due serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
hanno lo stesso carattere. Quindi la serie in questione diverge positivamente.